

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM

TÔN THẮT HOÀNG LÂN

**PHÁT TRIỂN CÁC KỸ THUẬT PHẦN TỬ HỮU HẠN
CHO PHÂN TÍCH KẾT CẤU DẠNG TÁM VÀ VỎ**

Chuyên ngành: Cơ Kỹ Thuật

Mã số chuyên ngành: 9520101

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. HỒ CHÍ MINH – NĂM 2022

Công trình được hoàn thành tại **Trường Đại Học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM**

Người hướng dẫn khoa học 1: PGS.TS. NGUYỄN VĂN HIẾU

Người hướng dẫn khoa học 2: PGS.TS. CHÂU ĐÌNH THÀNH

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án Cấp Trường
họp tại

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM

vào ngày tháng năm

TÓM TẮT

Tấm/vỏ là các kết cấu phổ biến trong cuộc sống thực tế, chúng được dùng làm mái che, sàn, tường, xilo, bể chứa,... Trong số các phương pháp dùng để mô phỏng cũng như phân tích ứng xử cơ học của tấm/vỏ, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là phương pháp được sử dụng rộng rãi và hiệu quả nhất. Với sự xuất hiện liên tục các bài toán phức tạp mới, FEM vẫn tồn tại những khó khăn nhất định liên quan đến chi phí tính toán, tính linh hoạt, kỹ thuật rời rạc phần tử, tính ổn định, độ chính xác,... Vì vậy, việc kiến nghị những cải tiến kỹ thuật cho FEM hiện hữu trong mô phỏng ứng xử tấm/vỏ luôn giữ vai trò quan trọng. Hướng nghiên cứu này luôn thiết thực, mang tính thời sự từ nhiều thập kỷ qua đến tận bây giờ. Với mong muốn làm đa dạng thêm nữa, tạo ra thêm nhiều phần tử lai, tích hợp từ những ưu điểm của các phần tử hiện hữu, luận án này đã được hình thành. Bên cạnh đó, mục tiêu của nghiên cứu là tạo nên một tập hợp các phần tử tứ giác 4 nút đơn giản trong thiết lập công thức dùng cho phân tích tấm/vỏ, càng ít bị ảnh hưởng bởi các hiện tượng khóa màng, khóa cắt,... càng tốt. Các đóng góp chính của luận án:

- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4H dựa vào kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp kỹ thuật cải biên dạng C^0 -HSDT để phân tích phi tuyến kết cấu tấm phẳng và tấm gấp. Phần tử này cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính.
- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép (TIS) dùng nghiên cứu ứng xử tuyến tính và phi tuyến của kết cấu tấm/vỏ. Với việc xây dựng hàm nội suy bậc cao dựa vào giá trị nút lẫn gradient trung bình nút trong phạm vi miền ảnh hưởng, phần tử này cải thiện được yếu tố bất liên tục của biến dạng và ứng suất qua biên của nó.
- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4C dựa trên kỹ thuật tổ hợp biến dạng: màng, uốn và cắt để phân tích tuyến tính kết cấu tấm/vỏ có hoặc không có sườn gia cường. Phần tử này cải thiện được độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về kết quả số liên quan đến hiện tượng khóa màng khi phân tích kết cấu vỏ.

- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4P dựa trên chuỗi đa thức Chebyshev để phân tích tuyến tính kết cấu dạng tấm/vỏ. Những kết quả số được cải thiện dựa vào lưới chia lần bậc của đa thức Chebyshev.

DANH SÁCH CÁC CHỮ VIẾT TẮT

- SQ4H The Sort of Q4 element based on Higher-order shear deformation theory
- SQ4T The Sort of Q4 element based on Twice interpolation strategy
- SQ4C The Sort of Q4 element based on Combined strain strategy
- SQ4P The Sort of Q4 element based on Chebyshev Polynomial
- FEM Finite Element Method
- FGM Functionally Graded Material
- FGP Functionally Graded Porous
- GPLs Graphene PlateLets
- P-S Symmetric Porosity distribution
- P-A Asymmetric porosity distribution
- P-U Uniform Porosity distribution
- GPL-S Graphene PlateLet Symmetric distribution
- GPL-A Graphene PlateLet Asymmetric distribution
- GPL-U Graphene PlateLet Uniform distribution
- TIS Twice interpolation strategy
- FSDT First-order Shear Deformation Theory
- HSDT Higher-order Shear Deformation Theory
- HBQ8 8-node Quadrilateral Assumed-Stress Hybrid Shell element
- KUMBA 8-node Curved Shell element with Reduced Integration

MỞ ĐẦU

1. Lý do lựa chọn đề tài

Việc xuất hiện liên tục những bài toán phức tạp mới (ví dụ vật liệu mới, điều kiện biên chính xác hơn, hay điều kiện tương tác phức tạp hơn, ...), FEM vẫn còn đó những khó khăn nhất định liên quan đến chi phí tính toán, tính linh hoạt,

kỹ thuật rời rạc phần tử, tính ổn định, độ chính xác,... Vì vậy, việc đề xuất các cải tiến kỹ thuật cho FEM hiện hữu trong mô phỏng ứng xử các kết cấu dạng tấm/vỏ luôn giữ vai trò rất quan trọng.

2. Nhiệm vụ của đề tài

Phát triển các kỹ thuật phần tử hữu hạn dùng để nghiên cứu ứng xử kết cấu dạng tấm/vỏ.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- Đối tượng: Kết cấu dạng tấm/vỏ
- Phạm vi nghiên cứu: Phân tích uốn tĩnh, dao động tự do, ổn định của kết cấu dạng tấm/vỏ dựa vào các kỹ thuật được phát triển.

4. Hướng tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết
- Phát triển kỹ thuật phần tử hữu hạn
- Lập trình mô phỏng số
- Phân tích và đánh giá kết quả.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu

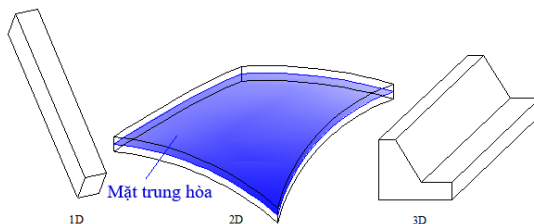
Luận án phát triển các kỹ thuật tính toán cần thiết hiện nay khi mà những kỹ thuật tính toán ngày càng được ứng dụng cao trong thực tiễn với các đối tượng là kết cấu tấm/vỏ trong kỹ thuật. Từ các kết quả nghiên cứu của luận án, các phần tử đề xuất có thể được tích hợp vào các module tính toán của các phần mềm hiện hữu.

6. Cấu trúc sơ lược

Luận án bao gồm: Mở đầu; Chương 1: Tổng quan; Chương 2: Cơ sở lý thuyết; Chương 3, 4, 5 và 6: Các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P; Chương 7: Đánh giá sai số chung giữa các phần tử, Chương 8: Kết luận và hướng phát triển kèm theo Danh mục tài liệu tham khảo và Danh mục các công trình công bố.

Chương 1 TỔNG QUAN

Tấm/vỏ là các kết cấu phổ biến trong cuộc sống thực tế, chúng được dùng làm mái che, sàn, tường, xilo, bể chứa,..., *Hình 1.1* [1-3]. Trong số các phương pháp dùng để mô phỏng cũng như phân tích ứng xử cơ học của tấm/vỏ [4-144], phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là phương pháp được sử dụng rộng rãi và hiệu quả nhất.



Hình 1.1: Kết cấu 1D, 2D và 3D

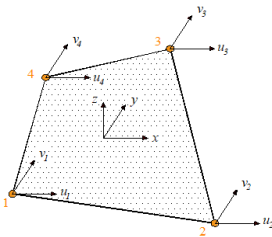
Luận án này tiến hành xây dựng một tập hợp các phần tử tứ giác 4 nút đơn giản trong thiết lập công thức dùng cho phân tích tấm/vỏ: SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P. Luận án bao gồm 8 chương kèm theo danh mục các bài báo công bố và tài liệu tham khảo.

Chương 2 CƠ SỞ LÝ THUYẾT

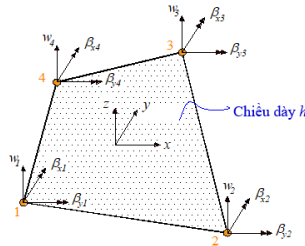
Vật liệu sử dụng: Vật liệu đẳng hướng cơ bản [1-4, 6, 7], vật liệu composite [5, 21, 22, 38, 65], vật liệu phân lớp chức năng FGM [66-74] và vật liệu xếp phân lớp chức năng FGP (P-S, P-A, P-U) có gia cường GPLs (GPL-S, GPL-A, GPL-U) [68-82, 141, 142].

Lý thuyết tấm/vỏ: FSDT và HSDT [2, 65, 108, 116, 119, 123].

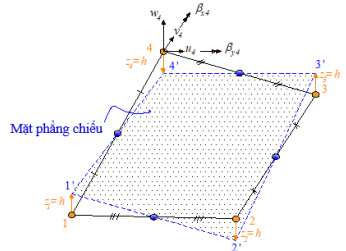
Công thức phần tử hữu hạn: Trên cơ sở [4, 5, 35], công thức dạng yếu cho phần tử màng tứ giác đẳng tham số, phần tử tấm uốn bốn nút có kể đến biến dạng cắt, kết hợp suy ra phần tử vỏ tứ giác phẳng bốn nút như *Hình 2.15*, *2.16* & *2.17*. được thể hiện trong luận án.



Hình 2.15: Phân tử màng tứ giác đẳng tham số



Hình 2.16: Phân tử tám uốn



Hình 2.17: Phép chiếu xuống mặt phẳng trung hòa

Chương 3 PHÂN TỬ SQ4H

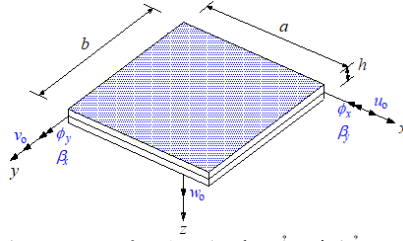
Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT của tác giả Reddy được trình bày

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\beta_y - (4/3h^2)z^3(\beta_y + \partial w_0 / \partial x) \\ v(x, y, z) &= v_0 - z\beta_x - (4/3h^2)z^3(-\beta_x + \partial w_0 / \partial y) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Bằng cách đặt $\partial w_0 / \partial x = \phi_x$ và $\partial w_0 / \partial y = \phi_y$, công thức (3.6) được viết lại

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + (z - 4z^3/3h^2)\beta_y - (4z^3/3h^2)\phi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - (z - 4z^3/3h^2)\beta_x - (4z^3/3h^2)\phi_y \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Các công thức phân tử hữu hạn áp dụng cho HSDT thường đòi hỏi hàm xấp xỉ liên tục bậc cao. Điều này dẫn đến sự phức tạp khi xây dựng hàm xấp xỉ phân tử hữu hạn. Để khắc phục, Reddy đã đề xuất một hình thức tính khác áp dụng cho HSDT mà chỉ đòi hỏi hàm xấp xỉ dạng tham số C^0 hay được gọi là C^0 -HSDT. Trong C^0 -HSDT, hai biến độc lập được bổ sung để biểu diễn đạo hàm của chuyển vị. Theo (3.7) trường chuyển vị bây giờ sẽ bao gồm 7 ẩn số $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \phi_x$ và ϕ_y độc lập nhau như Hình 3.1. Phân tử tứ giác SQ4H bốn nút được xây dựng dựa vào kỹ thuật làm trơn biến dạng ở miền con của phân tử trên nền tảng C^0 -HSDT kết hợp lý thuyết của Von-Kármán liên quan đến biến dạng nhỏ-chuyển vị lớn để phân tích phi tuyến các bài toán cơ học.



Hình 3.1: Chiều dương quy ước của các chuyển vị thẳng và xoay trong tấm

Biểu dạng trong phần tử

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + w_{,x}^2 / 2 \\ v_{,y} + w_{,y}^2 / 2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} - \frac{4}{3h^2} z^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{0,x}^2 / 2 \\ w_{0,y}^2 / 2 \\ w_{0,x} w_{0,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^L + \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{0,x} & 0 \\ 0 & w_{0,y} \\ w_{0,y} & w_{0,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b1} = \begin{bmatrix} \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} = \begin{bmatrix} \beta_{y,x} + \phi_{x,x} \\ -\beta_{x,y} + \phi_{y,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} + \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} + z^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} = \begin{bmatrix} w_{0,x} + \beta_y \\ w_{0,y} - \beta_x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} = -\frac{4}{h^2} \begin{bmatrix} \phi_x + \beta_y \\ \phi_y - \beta_x \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Phân tích phi tuyến hình học

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^L + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{NL} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L & \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

Chuyển vị trong phần tử được xấp xỉ thông qua chuyển vị nút của phần tử đó

$$\mathbf{q}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}]$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_n} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \mathbf{q}_i, \quad N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (3.16)$$

Các véc-tơ biểu dạng màng, biểu dạng uốn và biểu dạng cắt được thể hiện

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^L = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^L \mathbf{q}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{bi1} \mathbf{q}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{bi2} \mathbf{q}_i \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^{NL} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s1i} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s2i} \mathbf{q}_i \\
\mathbf{B}_{mi}^L &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{b1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{b2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\mathbf{B}_{mi}^{NL} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{s1i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & -N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{s2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Dựa vào kỹ thuật làm tròn trên phân tử theo các tác giả Nguyen-Xuan, Nguyen-Thoi, Nguyen-Van, ... [4, 5, 14-17, 20-22, 35, 83, 128, 129] và Hình 3.3

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{A_c} \sum_{m=1}^4 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_y & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_m^C \tag{3.25}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^{NL} = \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\mathbf{G}}_i, \quad \tilde{\mathbf{G}}_i = \frac{1}{A_c} \sum_{g=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_g^C,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x \mathbf{I}_j^C w_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y \mathbf{I}_j^C w_i \\ \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y \mathbf{I}_j^C w_i & \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x \mathbf{I}_j^C w_i \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{b1i} = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_b \tag{3.29}$$

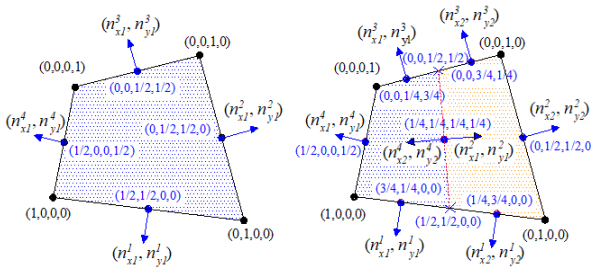
$$\tilde{\mathbf{B}}_{b2i} = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G)n_y & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_x \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G)n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G)n_x \end{pmatrix} l_b$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s1i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} N_i(\mathbf{x})n_x d\Gamma & 0 & N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} N_i(\mathbf{x})n_y d\Gamma & -N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) & N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

với nG là số điểm tích phân Gauss, x_{bn} là điểm Gauss, w_n là trọng số tương ứng và w_i là chuyển vị tại nút i của phần tử. Ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử được sử dụng khi phân tích phi tuyến [83-94]

$$\tilde{\mathbf{K}}_T = \tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_{NL} + \tilde{\mathbf{K}}_g \quad (3.33)$$



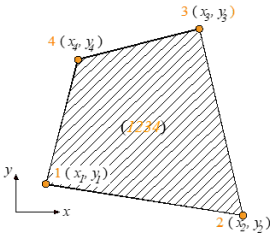
Hình 3.3: $n_c=1$ & 2 và giá trị các hàm dạng tương ứng

Phương trình phi tuyến được trình bày dưới dạng

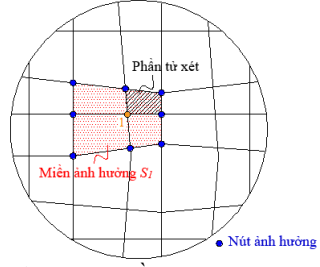
$${}^t \tilde{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - {}^t \mathbf{F}, \quad {}^t \tilde{\mathbf{F}} = \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_{NL})^t \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega, \quad {}^t \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^* = {}^t \boldsymbol{\sigma}_i^* + {}^t \Delta \boldsymbol{\sigma}^* \quad (3.35)$$

Chương 4 PHÂN TỬ SQ4T

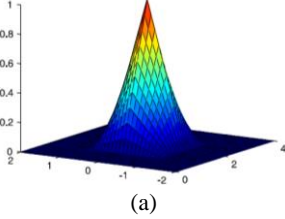
TIS lần đầu tiên được đưa ra bởi các tác giả Zheng, Bui Q.T, ... [51-53]. Kỹ thuật này tiến hành xây dựng hàm dạng bậc cao kể đến ảnh hưởng của nhóm nút lân cận đến giá trị biến của điểm cần xét, có thể thích nghi với lưới phần tử “méo” trong một số dạng bài toán, kết quả hội tụ với độ chính xác khá cao và trường ứng suất thu được liên tục qua biên phần tử. Sự khác biệt của FEM dựa trên kỹ thuật nội suy kép so với truyền thống có thể thấy ở Hình 4.1, 4.2 & 4.3.



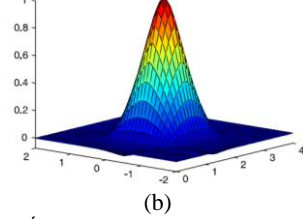
Hình 4.1: Phân tử tứ giác 4 nút



Hình 4.2: Miền ảnh hưởng nút 1



(a)



(b)

Hình 4.3: Hàm dạng tứ giác 4 nút: a) truyền thông, b) nội suy kép [51]

Trường chuyển vị

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{sp}} \tilde{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i = & \underbrace{\varepsilon_1 N_i^{[1]} + \varepsilon_{1x} \bar{N}_{i,x}^{[1]} + \varepsilon_{1y} \bar{N}_{i,y}^{[1]}}_{\text{node 1}} + \underbrace{\varepsilon_2 N_i^{[2]} + \varepsilon_{2x} \bar{N}_{i,x}^{[2]} + \varepsilon_{2y} \bar{N}_{i,y}^{[2]}}_{\text{node 2}} \\ & + \underbrace{\varepsilon_3 N_i^{[3]} + \varepsilon_{3x} \bar{N}_{i,x}^{[3]} + \varepsilon_{3y} \bar{N}_{i,y}^{[3]}}_{\text{node 3}} + \underbrace{\varepsilon_4 N_i^{[4]} + \varepsilon_{4x} \bar{N}_{i,x}^{[4]} + \varepsilon_{4y} \bar{N}_{i,y}^{[4]}}_{\text{node 4}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\bar{N}_{i,x}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,x}^{[1]l e l}), \quad \bar{N}_{i,y}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,y}^{[1]l e l}), \quad \omega_e = \Delta_e / \sum_{\tilde{e} \in S_1} \Delta_{\tilde{e}} \quad \text{với } e \in S_1 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= N_1 + N_1^2 N_2 + N_1^2 N_3 + N_1^2 N_4 - N_1 N_2^2 - N_1 N_3^2 - N_1 N_4^2 \\ \varepsilon_{1x} &= -(x_1 - x_2) (N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4) \\ &\quad - (x_1 - x_3) (N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4) \\ &\quad - (x_1 - x_4) (N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1y} &= -(y_1 - y_2) (N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4) \\ &\quad - (y_1 - y_3) (N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4) \\ &\quad - (y_1 - y_4) (N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3) \\ N_i &= (1 + \xi_i \bar{\xi}) (1 + \eta_i \bar{\eta}) / 4, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Các hàm thử này thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
& \Xi_1(\mathbf{x}_i) = \delta_{li}, \quad \Xi_{1,x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1,y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1x,x}(\mathbf{x}_i) = \delta_{li}, \\
& \Xi_{1x,y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1y,x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \Xi_{1y,y}(\mathbf{x}_i) = \delta_{li} \\
& \delta_{li} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Xây dựng phần tử tứ giác bốn nút SQ4T với 5 bậc tự do cho mỗi nút đồng thời áp dụng FSDT, các thành phần biến dạng tuyến tính và phi tuyến

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) &= \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},y} & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5n_{sp}} \\
\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & \tilde{N}_{n_{sp},x} \end{bmatrix}_{3 \times 5n_{sp}} \\
\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & \tilde{N}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & \tilde{N}_{n_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & \tilde{N}_1 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & \tilde{N}_{n_{sp}} \end{bmatrix}_{2 \times 5n_{sp}} \\
\mathbf{q}_e &= \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \right]_{(i=1..n_{sp})}^T
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Trường hợp phân tích uốn phi tuyến

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m^{NL}(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e, \quad \mathbf{B}_m^{NL} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{G}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5n_{sp}}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{i,x}w_i & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{i,y}w_i \\ \tilde{N}_{i,y}w_i & \tilde{N}_{i,x}w_i \end{bmatrix}_{(i=1..n_{sp})} \tag{4.23}$$

Từ đó ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử SQ4T

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_{gNL} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{K}_L = \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_L d\Omega, \quad \mathbf{K}_{NL} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_{NL} d\Omega, \quad \mathbf{K}_{gNL} = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{N}} \mathbf{G} d\Omega$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^L \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{NL} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

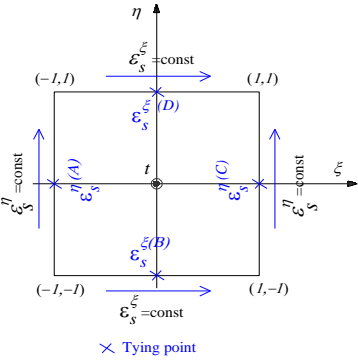
Phương trình phi tuyến được trình bày tương tự (3.35).

Chương 5 PHẦN TỬ SQ4C

Trên cơ sở nghiên cứu tấm/vỏ dựa vào FSDT, mối quan tâm lớn liên quan đến hiện tượng khóa cắt khi chiều dày của kết cấu trở nên mỏng dẫn đến chuyển vị của tấm/vỏ giảm khi chiều dày giảm do năng lượng biến dạng cắt không được loại bỏ. Để khắc phục hiện tượng khóa cắt, theo nhóm tác giả Bathe và Dvorkin [10, 11], xem biến dạng cắt ngang là hằng số dọc cạnh phần tử như Hình 5.1. Trường biến dạng cắt ngang được xây dựng thông qua 4 điểm buộc A, B, C và D theo các công thức

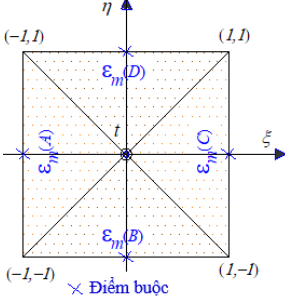
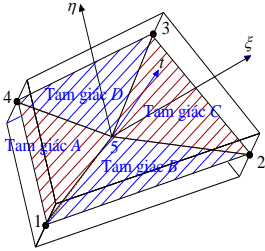
$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_s^\xi &= \frac{1}{2}(1+\eta)\epsilon_s^{\xi(D)} + \frac{1}{2}(1-\eta)\epsilon_s^{\xi(B)} \\ \tilde{\epsilon}_s^\eta &= \frac{1}{2}(1+\xi)\epsilon_s^{\eta(C)} + \frac{1}{2}(1-\xi)\epsilon_s^{\eta(A)} \end{aligned} \tag{5.1}$$

trong đó $\epsilon_s^{\xi(A)}, \epsilon_s^{\xi(B)}, \epsilon_s^{\eta(C)}, \epsilon_s^{\eta(D)}$ là các biến dạng cắt ngang được tính toán trực tiếp thông qua xấp xỉ chuyển vị tại các điểm buộc.

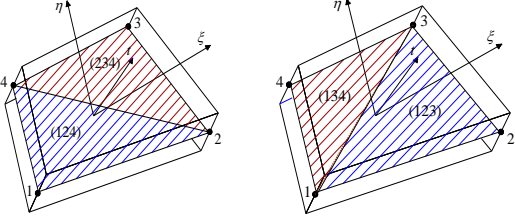


Hình 5.1: Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng cắt ngang

Hình 5.2: Cơ sở xác định nút ảo 5



Hình 5.3: Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng màng



Ngoài ra, khi phân tích vỏ có độ cong nhất định với lưới chia méo để dẫn đến hiện tượng khóa màng do phần tử sử dụng là phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp. Để khắc phục hiện tượng này, theo các tác giả Ko và Lee [23, 24], tiến hành chia miền phần tử tại mặt trung hòa thành 4 miền tam giác con như *Hình 5.2*. Nút ảo 5 được xác định thông qua 4 diện tích “124”, “234”, “134” và “123”

$$\mathbf{x}_5 = \sum_{i=1}^4 \zeta_i \mathbf{x}_i$$

$$[\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_3 \quad \zeta_4] = \frac{1}{2} \frac{A_{234}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{124}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \frac{A_{134}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{123}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Trường biến dạng màng được xây dựng thông qua 4 điểm buộc A, B, C, D như *Hình 5.3* và công thức sau

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}) \xi + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) \eta \quad (5.5)$$

với $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)}, \boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)}, \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}$ và $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}$ là các biến dạng màng được tính thông qua bốn miền tam giác con và được đặt tại bốn điểm buộc A, B, C và D , cần lưu ý nhỏ tại nút ảo 5 không hình thành các bậc tự do phụ trợ trong quá trình xây dựng véc-tơ chuyển vị của phần tử đang xét. Kết hợp kỹ thuật làm trơn biến dạng uốn trên miền con như *Hình 3.3*, phần tử SQ4C được hình thành trên cơ sở tổ hợp biến dạng màng, uốn và cắt. Trong đó biến dạng màng được xác định như sau

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \bar{\mathbf{B}}_m \mathbf{q}_m \quad (5.13)$$

với ma trận $\bar{\mathbf{B}}_m$ thiết lập trên cơ sở bốn ma trận $\bar{\mathbf{B}}_m^{(A)}, \bar{\mathbf{B}}_m^{(B)}, \bar{\mathbf{B}}_m^{(C)}$ và $\bar{\mathbf{B}}_m^{(D)}$ của bốn miền tam giác con. Biến dạng uốn được xác định

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_b(\mathbf{x}_C) = \tilde{\mathbf{B}}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_b$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bi}(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y \\ 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x \end{pmatrix} l_b^C \quad (5.14)$$

A_C là diện tích của miền tứ giác con, \mathbf{x}_b^G là điểm Gauss, l_b^C là chiều dài cạnh miền con, lưu ý 2 là số lượng tứ giác con được lựa chọn khi tính toán biến dạng uốn. Biến dạng cắt ngang cũng được xây dựng công thức cụ thể

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_s = \tilde{\mathbf{B}}_s \mathbf{q}_s \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{st} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & b_i^{11}N_{i,\xi} & b_i^{12}N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} & b_i^{21}N_{i,\eta} & b_i^{22}N_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

$$b_i^{11} = \xi_i x_{,\xi}^{R_1}, \quad b_i^{12} = \xi_i y_{,\xi}^{R_1}, \quad b_i^{21} = \eta_i x_{,\eta}^{R_2}, \quad b_i^{22} = \eta_i y_{,\eta}^{R_2}$$

$$\xi_i \in \{-1 \ 1 \ 1 \ -1\}, \quad \eta_i \in \{-1 \ -1 \ 1 \ 1\}$$

$$(i, R_1, R_2) \in \{(1, B, A), (2, B, C), (3, D, C), (4, D, A)\}$$

Ma trận độ cứng tổng được thiết lập

$$\tilde{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_m + \tilde{\mathbf{K}}_{mb} + \tilde{\mathbf{K}}_{mb}^T + \tilde{\mathbf{K}}_b + \bar{\mathbf{K}}_s \quad (5.20)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{mb} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{K}}_b = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_{bi}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_{bi} A_c$$

$$n_c = 2, \quad \bar{\mathbf{K}}_s = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{C}_s \bar{\mathbf{B}}_s d\Omega$$

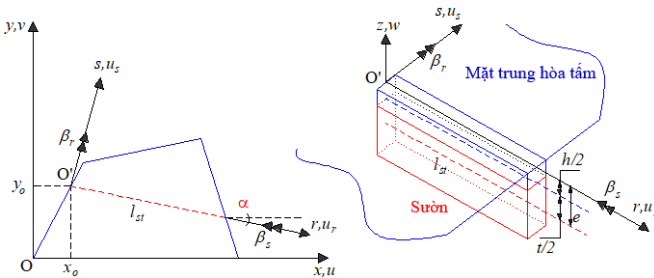
Trường hợp có gấn sườn gia cường, phần tử SQ4C được thêm bậc tự do thứ 6 là β_z cho mỗi nút theo [5, 48, 130-132]. Ma trận $\bar{\mathbf{K}}_m$ được viết lại

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{b} d\Omega, \quad \gamma = G \quad (5.25)$$

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}N_{i,y} \\ -\frac{1}{2}N_{i,x} \\ -\frac{1}{2}(Nx_{i,y} + Ny_{i,x}) - N_i \end{bmatrix}, \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.26)$$

$$Nx_i = \frac{1}{8}(y_{ij}N_l - y_{ik}N_m), \quad Ny_i = \frac{1}{8}(x_{ij}N_l - x_{ik}N_m), \quad x_{ij} = x_j - x_i, \quad y_{ij} = y_j - y_i$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad m = i + 4; \quad l = m - 1 + 4 * \text{floor}(1/i); \quad k = \text{mod}(m, 4) + 1; \quad j = l - 4; \quad (5.27)$$



Hình 5.5: Mô tả kết cấu tấm gia cường sườn

Sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko để tính toán cho sườn gia cường. Trong trường hợp tổng quát trục sườn hợp với phương x một góc α như Hình 5.5. Chiều dài phần tử sườn l_{st} giới hạn trong phạm vi phần tử tứ giác SQ4C và tùy thuộc vào lưới chia cho tấm, h và t lần lượt là chiều dày tấm và chiều cao của

sườn gia cường. Hệ trục địa phương $O'rsz$ gắn với sườn có mặt phẳng $O'rs$ trùng với mặt phẳng Oxy . Tại vị trí tiếp xúc, chuyển vị của sườn và tấm là giống nhau. Công thức chuyển trục và biến dạng trong sườn được tính toán như sau

$$\mathbf{u}_{st} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{u} \quad (5.29)$$

trong đó e là độ lệch giữa trục sườn với mặt trung hòa của tấm. Với việc sử dụng phần tử dầm 2 nút Timoshenko đẳng tham số để mô hình cho sườn

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 N_i^{st} \mathbf{I}_6 \mathbf{q}_i^{st} \quad (5.30)$$

$N_1^{st} = (1-\xi)/2$ và $N_2^{st} = (1+\xi)/2$ là các hàm dạng tuyến tính trong hệ tọa độ tự nhiên gắn với phần tử dầm. Ma trận độ cứng và ma trận độ cứng hình học của phần tử dầm trình bày dưới dạng

$$\mathbf{K}_c^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st})^T \mathbf{D}^{st} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st} dl, \quad \mathbf{K}_{cg}^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st})^T \boldsymbol{\sigma}^{st} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st} dl \quad (5.31)$$

$$\mathbf{D}^{st} = \text{diag}(EA_{st}, EI_s, 5GA_{st}/6, GJ), \quad \boldsymbol{\sigma}^{st} = \text{diag}(A_{st}\sigma_x^0, (I_s + e^2 A_{st})\sigma_x^0) \quad (5.33)$$

A_{st} là diện tích mặt cắt ngang của dầm, I_s là momen quán tính tương quan với trục s , $J \approx A_{st}^4 / 40I_r$ là hằng số xoắn St.Venant và I_r là momen quán tính tương quan với trục r , ngoài ra E, G là các hằng số mô đun vật liệu.

Chương 6 PHÂN TỬ SQ4P

Đa thức Chebyshev bậc p được định nghĩa theo [31, 138, 139]

$$T_p(x) = T_p(\cos\theta) = \cos p\theta \quad (6.1)$$

với $-1 \leq x = \cos\theta \leq 1$ và

$$\cos(p+1)\theta = 2\cos\theta\cos p\theta - \cos(p-1)\theta \quad (6.2)$$

Từ các công thức (6.1) và (6.2)

$$T_{p+1}(x) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Đa thức Chebyshev $T_p(x)$ với $p \geq 2$ có giá trị bằng 0 tại các điểm Gauss x_i như dưới đây

$$x_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p], \quad i = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow T_p(x_i) = 0 \quad (6.4)$$

Ý tưởng quan trọng nhất liên quan đến quá trình xấp xỉ của một hàm chưa xác định $f(x)$ dựa vào đa thức nội suy Lagrangian $Y(x)$ thông qua những điểm đã biết $(x_k, f(x_k))$ liên quan đến đa thức Chebyshev như mô tả sau

$$f(x) \approx Y(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i T_i(x) \quad \text{và} \quad f(x_k) = Y(x_k) \quad (6.5)$$

Trên đoạn $[-1, 1]$, đa thức Chebyshev có đặc tính trực giao nên

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^p f(x_k) T_i(x_k)}{\sum_{k=1}^p T_i^2(x_k)} \quad (6.6)$$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{p-1} \left[\frac{(T_i(x_k) T_i(x))}{\sum_{j=1}^p T_i^2(x_j)} \right] f(x_k)$$

Đặt $x = \cos(\pi/2p)\xi$

$$Y(\xi) = \sum_{k=1}^p N_k^{Che}(\xi) f(\xi_k) \quad (6.8)$$

Hàm dạng 1D là $N_k^{Che}(\xi)$ được định nghĩa

$$N_k^{Che}(\xi) = \sum_{i=0}^{p-1} \left[\frac{(T_i(\cos(\pi/2p)\xi_k) T_i(\cos(\pi/2p)\xi))}{\sum_{j=1}^p T_i^2(\cos(\pi/2p)\xi_j)} \right] \quad (6.9)$$

$$\xi_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p] / \cos(\pi/2p), \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Trong không gian 2D

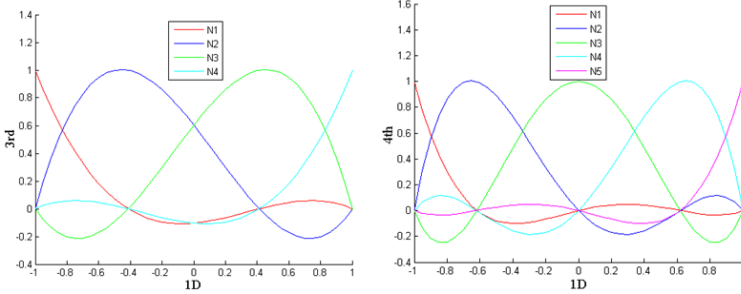
$$(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (6.11)$$

Hàm dạng liên quan đến nút $I(\xi_i, \eta_j)$ trong không gian này

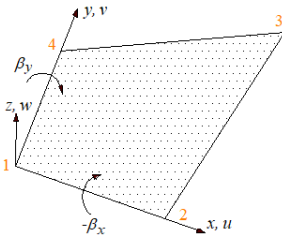
$$N_i^{Che}(\xi, \eta) = N_i^{Che}(\xi) N_j^{Che}(\eta) \quad (6.12)$$

trong đó $N_i^{Che}(\xi)$ là hàm dạng 1D bậc p_1 ứng với tập $\xi \in [-1, 1]$ và $N_j^{Che}(\eta)$ là hàm dạng 1D bậc p_2 ứng với tập $\eta \in [-1, 1]$. Hình 6.1 đề cập đến các hàm dạng 1D bậc 3, 4 liên quan đến đa thức Chebyshev. Phần tử tứ giác bốn nút SQ4P với 5 bậc tự do mỗi nút được xây dựng dựa vào FSĐT và chuỗi đa thức

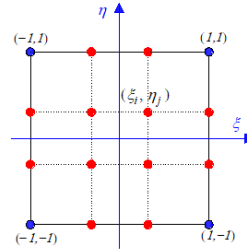
Chebyshev. Số lượng $[(p_1+1)(p_2+1)-4]$ nút ảo được thêm vào như Hình 6.2 & 6.3.



Hình 6.1: Hàm dạng 1D bậc 3, 4



Hình 6.2: Chiều dương quy ước của các thành phần chuyển vị trong phần tử SQ4P



● Nút thêm vào

Hình 6.3: Phần tử SQ4P trong hệ tọa độ tự nhiên tương ứng $p_1=p_2=3$

Các thành phần biến dạng màng, uốn và cắt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.18)$$

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{q}_e = \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \right]_{i=1, \dots, (p_1+1)(p_2+1)}^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.20)$$

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.22)$$

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & N_1^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & N_1^{Che} & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} \end{bmatrix}_{2 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.23)$$

Ma trận độ cứng tổng của phần tử

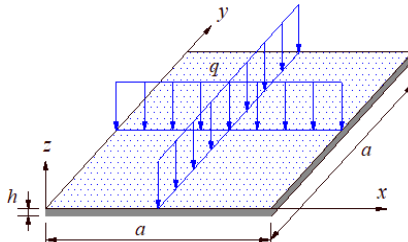
$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s d\Omega \quad (6.24)$$

Đối với kết cấu dạng vỏ, thành phần chuyển vị xoay trong mặt phẳng phần tử được thêm vào các ma trận địa phương của phần tử. Các giá trị ảo của độ cứng tương ứng với thành phần chuyển vị xoay này được gán các giá trị xấp xỉ, thường là 10^{-3} lần giá trị lớn nhất trên đường chéo chính của ma trận độ cứng phần tử. Trong phạm vi luận án này, luật cầu phương Gauss đủ được thực hiện nên số điểm Gauss sử dụng cho mỗi phần tử là $(p_1+1)(p_2+1)$ và tổng số bậc tự do tương ứng cho mỗi phần tử là $5(p_1+1)(p_2+1)$, hiển nhiên là $6(p_1+1)(p_2+1)$ cho vỏ.

Chương 7 ĐÁNH GIÁ SAI SỐ CHUNG GIỮA CÁC PHẦN TỬ

Tám đẳng hướng chịu tải phân bố đều:

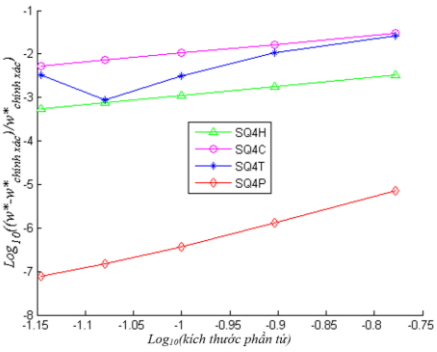
Khảo sát tám vuông như Hình 7.1 liên kết tựa đơn (SSSS) và liên kết ngàm (CCCC) dưới sự thay đổi tỷ số giữa chiều dài và chiều dày tám $a/h = 10, 100, 1000, 10000$. Tám chịu tải phân bố đều q với các đặc trưng vật liệu như hằng số mô đun Young $E = 1.092 \text{ MPa}$ và hệ số Poisson $\mu = 0.3$. Độ võng ngay chính giữa tám được xác định theo công thức $w^* = (100Eh^3w_c) / [12qa^4(1-\mu^2)]$. Tiến hành so sánh sai số kết quả phân tích độ võng khi sử dụng bốn phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P. Nghiệm chính xác được tham khảo từ tài liệu [140] của nhóm tác giả Taylor và cộng sự.



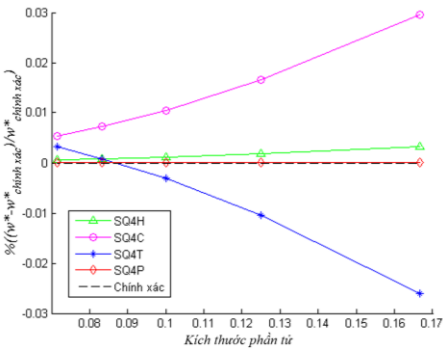
Hình 7.1: Tám vuông chịu tải phân bố đều

Các Hình 7.2.a-h thể hiện đồ thị so sánh sai số theo \log_{10} và theo % với các lưới chia $6 \times 6, 8 \times 8, 10 \times 10, 12 \times 12$ và 14×14 ứng với trường hợp liên kết tựa đơn (SSSS) và tỷ số $a/h = 10, 100, 1000$ và 10000 . Bảng 7.1 trình bày giá trị độ võng thu được khi dùng bốn phần tử của luận án. Có thể thấy kết quả độ võng chính giữa tám đạt được bởi phần tử SQ4P tốt nhất, tiếp đến là phần tử SQ4H và sau đó là hai phần tử còn lại SQ4C và SQ4T.

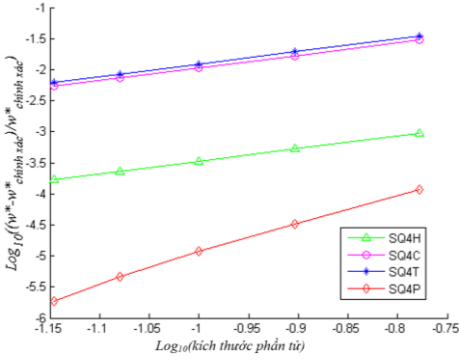
Tương tự, trường hợp tám liên kết ngàm (CCCC), Bảng 7.2 trình bày giá trị độ võng thu được khi dùng bốn phần tử của luận án đồng thời các Hình 7.3.a-d tiếp tục thể hiện đồ thị đánh giá sai số chung giữa bốn phần tử SQ4H, SQ4C, SQ4T và SQ4P. Phần tử SQ4P vẫn cho kết quả khả quan nhất, tiếp đến là phần tử SQ4H và sau cùng là hai phần tử còn lại SQ4C, SQ4T. Đặc biệt trong một số trường hợp thể hiện sự không ổn định trong kết quả thu được bởi phần tử SQ4T như ở Hình 7.2.a và Hình 7.3.a liên quan đến việc tính toán thông qua miền ảnh hưởng lân cận phần tử đang xét. Đánh giá kỹ hơn về vấn đề này có thể được xem như một định hướng phát triển tương lai của luận án.



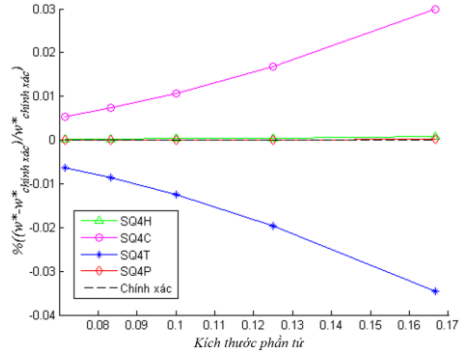
(a) $a/h = 10, \text{SSSS}$



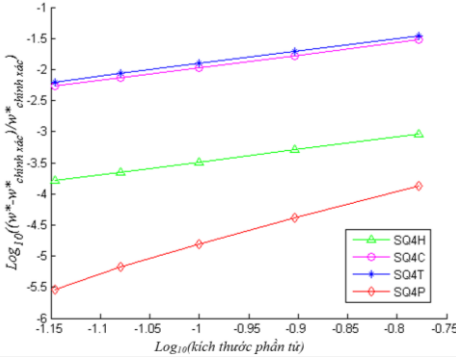
(b) $a/h = 10, \text{SSSS}$



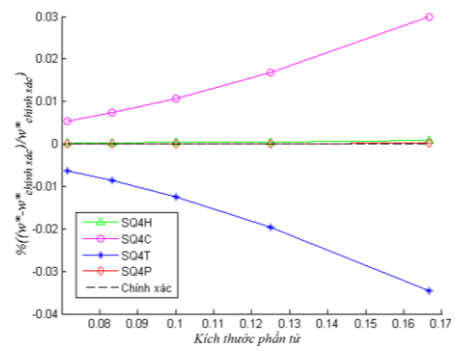
(c) $a/h = 100$, SSSS



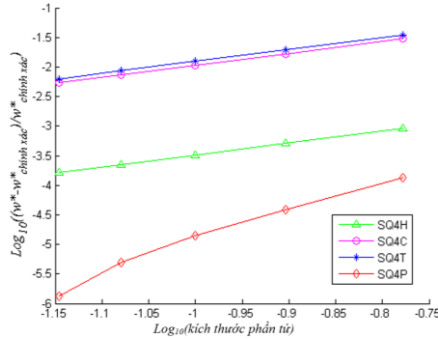
(d) $a/h = 100$, SSSS



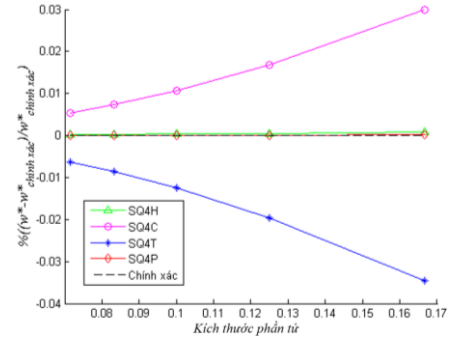
(e) $a/h = 1000$, SSSS



(f) $a/h = 1000$, SSSS

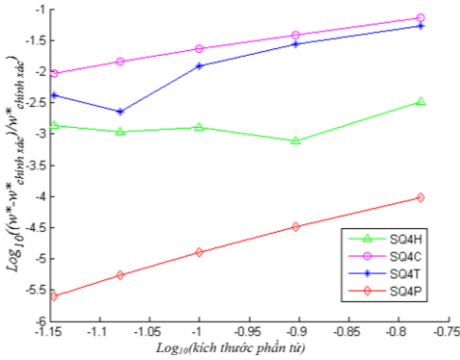


(g) $a/h = 10000$, SSSS

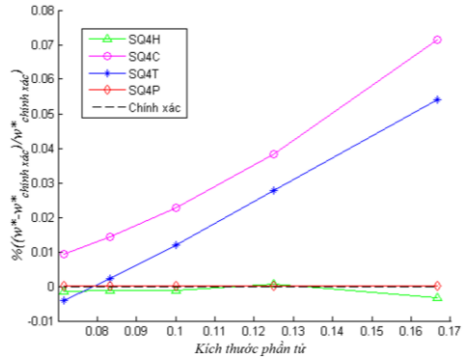


(h) $a/h = 10000$, SSSS

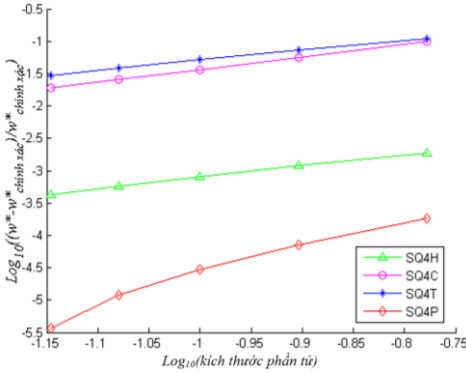
Hình 7.2: So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết tựa đơn với $a/h = 10, 100, 1000, 10000$



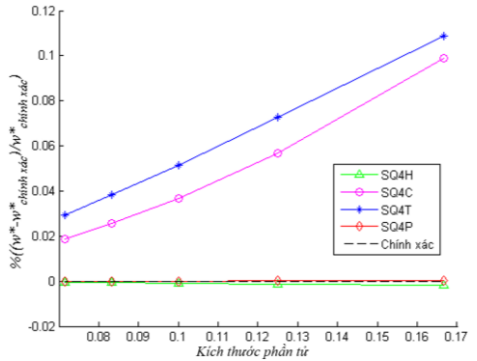
(a) $a/h = 10$, CCCC



(b) $a/h = 10$, CCCC



(c) $a/h = 10000$, CCCC



(d) $a/h = 10000$, CCCC

Hình 7.3: So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết ngàm với $a/h = 10, 10000$

Bảng 7.1: So sánh độ võng chính giữa tấm vuông liên kết tựa đơn (SSSS)

Chia lưới	w^* (SSSS)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.428705	0.428053	0.427756	0.427607	0.427517
SQ4T	0.416173	0.422814	0.425944	0.427656	0.428687
SQ4C	0.439931	0.434335	0.431777	0.430397	0.429568
SQ4P	0.427287	0.427285	0.427284	0.427284	0.427284
$a/h = 100$					
SQ4H	0.406833	0.406661	0.406582	0.40654	0.406515
SQ4T	0.392431	0.398544	0.401415	0.402984	0.403928
SQ4C	0.418631	0.413238	0.410774	0.409444	0.408646
SQ4P	0.406494	0.406459	0.406451	0.406448	0.406447
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.406614	0.406447	0.40637	0.406329	0.406305
SQ4T	0.392193	0.398301	0.40117	0.402737	0.403680
SQ4C	0.418418	0.413027	0.410564	0.409235	0.408436
SQ4P	0.406293	0.406254	0.406244	0.406241	0.406239
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.406612	0.406445	0.406368	0.406327	0.406303
SQ4T	0.392191	0.398299	0.401167	0.402735	0.403678

SQ4C	0.418416	0.413025	0.410561	0.409233	0.408434
SQ4P	0.406291	0.406253	0.406242	0.406239	0.406237

Bảng 7.2: So sánh độ võng chính giữa tâm vuông liên kết ngàm (CCCC)

Chia lưới	w^* (CCCC)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.149973	0.150578	0.150268	0.150302	0.150256
SQ4T	0.158590	0.154636	0.152279	0.150808	0.149836
SQ4C	0.161212	0.156231	0.153900	0.152630	0.151863
SQ4P	0.150448	0.150458	0.150461	0.150462	0.150462
$a/h = 100$					
SQ4H	0.126546	0.126640	0.126684	0.126716	0.126731
SQ4T	0.140491	0.135932	0.133233	0.131559	0.130452
SQ4C	0.139258	0.133919	0.131395	0.130004	0.129159
SQ4P	0.126763	0.126776	0.126781	0.126783	0.126784
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.126300	0.126382	0.126433	0.126461	0.126479
SQ4T	0.140306	0.135739	0.133036	0.131359	0.130251
SQ4C	0.139034	0.133691	0.131163	0.129770	0.128923
SQ4P	0.126510	0.126524	0.126530	0.126532	0.126533
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.126297	0.126379	0.126430	0.126459	0.126477
SQ4T	0.140304	0.135737	0.133034	0.131357	0.130249
SQ4C	0.139032	0.133688	0.131160	0.129768	0.128921
SQ4P	0.126508	0.126522	0.126527	0.126529	0.126531

Bảng 7.3: So sánh thời gian tính toán theo giây (s)

SSSS, $a/h = 10$				
14 x 14				6 x 6
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	SQ4P
(1575 dofs)	(1125 dofs)	(1125 dofs)	(9245 dofs)	(1805 dofs)
0.47674 s	11.2697 s	2.2078 s	81.9208 s	2.8599 s
SSSS, $a/h = 10000$				
14 x 14				6 x 6
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	SQ4P
(1575 dofs)	(1125 dofs)	(1125 dofs)	(9245 dofs)	(1805 dofs)
0.47621 s	11.6926 s	2.7641 s	83.1269 s	2.9227 s
CCCC, $a/h = 10$				
14 x 14				6 x 6
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	SQ4P
(1575 dofs)	(1125 dofs)	(1125 dofs)	(9245 dofs)	(1805 dofs)
0.7518 s	11.0411 s	2.4872 s	83.3733 s	2.9587 s
CCCC, $a/h = 10000$				
14 x 14				6 x 6
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	SQ4P
(1575 dofs)	(1125 dofs)	(1125 dofs)	(9245 dofs)	(1805 dofs)
0.7202 s	11.3438 s	2.9373 s	83.7899 s	2.9251 s

Trên cơ sở máy tính với các thông số **Intel® Core™ i7 @ 2.80 GHz, 8.00GB RAM**, việc so sánh thời gian tính toán giữa các phần tử được trình bày ở **Bảng 7.3**. Nếu dựa vào số lượng phần tử tương đương nhau, có thể thấy thời gian tính

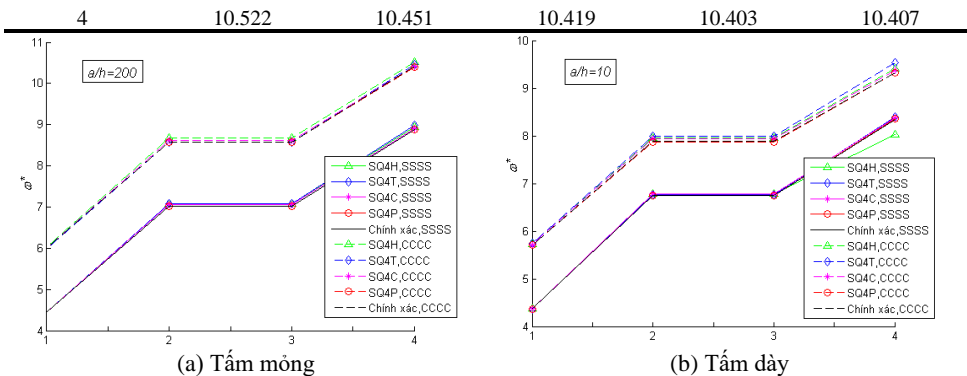
toán theo giây (s) của phần tử SQ4P là lớn nhất. Tuy nhiên việc sử dụng bậc $p_1=p_2=3$ cho phần tử SQ4P khiến tổng số bậc tự do (dofs) của phần tử này lớn hơn nhiều so với các phần tử còn lại. Việc so sánh thời gian dựa trên tổng số bậc tự do xấp xỉ nhau cho thấy thời gian tính toán của phần tử SQ4T là lớn nhất. Điều này cũng được trình bày trên *Bảng 7.3*.

Tầm đẳng hướng dao động tự do

Ở mục này, luận án đề cập đến phân tích dao động tự do của tấm vuông mỏng ($a/h = 200$) và dày ($a/h = 10$) với hai điều kiện biên là tựa đơn (SSSS) và ngàm (CCCC). Đặc trưng vật liệu $E = 200$ GPa, hệ số Poisson $\mu = 0.3$ và mật độ khối lượng $\rho = 8000$ kg/m³. Bốn giá trị tần số dao động đầu tiên chuẩn hóa $\omega^* = [12\omega_{vib}\rho a^4(1-\mu^2)/(Eh^2)]^{1/4}$ dựa vào bốn phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P ứng với lưới chia 8x8 được trình bày ở *Bảng 7.4* và *Hình 7.4*. Các kết quả này được đem so sánh với kết quả chính xác trích xuất từ tài liệu của nhóm tác giả Abbassian và cộng sự [143]. Bên cạnh đó, thời gian tính toán cũng được ghi nhận lại giữa các phần tử với tổng số bậc tự do xấp xỉ 1600 dofs trên toàn miền rời rạc. *Bảng 7.5* cho thấy thời gian tính toán của phần tử SQ4T vẫn lớn nhất.

Bảng 7.4: So sánh giá trị bốn tần số dao động đầu tiên của tấm vuông đẳng hướng

Dạng dao động	$a/h = 10, (SSSS)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	4.373	4.368	4.369	4.366	4.37
2	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
3	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
4	8.028	8.391	8.379	8.354	8.35
Dạng dao động	$a/h = 10, (CCCC)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	5.726	5.738	5.715	5.703	5.71
2	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
3	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
4	9.414	9.533	9.378	9.325	9.33
Dạng dao động	$a/h = 200, (SSSS)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	4.450	4.455	4.445	4.443	4.443
2	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
3	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
4	8.948	8.987	8.909	8.885	8.886
Dạng dao động	$a/h = 200, (CCCC)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	6.024	5.986	6.000	5.998	5.999
2	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568
3	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568



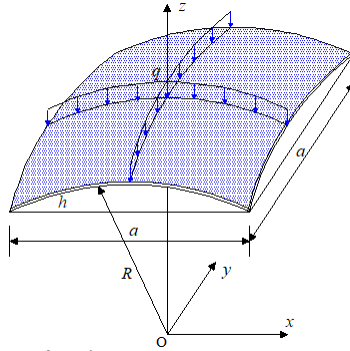
Hình 7.4: So sánh tần số của bốn dạng dao động đầu tiên

Vỏ cầu đẳng hướng chịu tải phân bố đều

Một vỏ cầu tựa đơn trên bốn cạnh biên và chịu tải phân bố đều q như **Hình 7.5** được phân tích và so sánh kết quả độ võng ngay điểm chính giữa vỏ. Kết cấu này có các đặc trưng $a = 32$, $R = 96$, $h = 0.32$, $E = 10^7$, $\mu = 0.3$ và $q = 100$. Mô hình $\frac{1}{4}$ vỏ với lưới chia 8×8 , 12×12 và 16×16 được sử dụng để tính toán kết quả độ võng dựa trên các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P. **Bảng 7.6** thể hiện kết quả thu được ứng với 4 phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P đồng thời thể hiện kết quả tham khảo từ tài liệu [6] của nhóm tác giả Darilmaz và cộng sự với 12×12 phần tử vỏ 8 nút HBQ8, tài liệu [144] của nhóm tác giả Kumbasar và cộng sự với 16×16 phần tử vỏ cong KUMBA và tài liệu [119] của tác giả Reddy với nghiệm giải tích.

Bảng 7.5: So sánh thời gian tính toán theo giây (s)

SSSS, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
19.4063 s	30.2069 s	17.1924 s	10.6400 s
CCCC, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
13.3436 s	27.0411 s	13.9900 s	10.3403 s
SSSS, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
18.2277 s	30.4165 s	16.7336 s	10.3201 s
CCCC, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
12.3259 s	26.2291 s	13.6833 s	10.1188 s



Hình 7.5: Vòm cầu đẳng hướng tựa đơn chịu tải phân bố đều

Theo *Bảng 7.6*, khi so sánh với nghiệm giải tích cho bởi tác giả Reddy, kết quả thu được bởi 3 phần tử SQ4T, SQ4C và SQ4P theo xu hướng cận dưới trong đó kết quả tốt nhất là của phần tử SQ4P tiếp theo là của phần tử SQ4C. Với phần tử SQ4T, kết quả sai số nhiều liên quan đến quá trình xác định miền ảnh hưởng bao quanh phần tử đang xét, nhất là đối với kết cấu vòm cong hai phương, dẫn đến phức tạp trong quá trình tính toán ma trận độ cứng tổng thể cũng như cứng hóa kết cấu kéo theo sai số lớn. Ngoài ra, kết quả thu được bởi phần tử SQ4H theo xu hướng cận trên như thể hiện ở *Bảng 7.6*.

Bảng 7.6: So sánh giá trị độ võng ngay chính giữa vòm cầu tựa đơn

So sánh	Lưới chia	w
SQ4H	8 x 8	0.3299
	12 x 12	0.3269
	16 x 16	0.3236
SQ4T	8 x 8	0.2699
	12 x 12	0.2744
	16 x 16	0.2824
SQ4C	8 x 8	0.3108
	12 x 12	0.3124
	16 x 16	0.3129
SQ4P	8 x 8	0.3129
	12 x 12	0.3131
	16 x 16	0.3132
HBQ8 [6]		0.3104
KUMBA [144]		0.3304
Giải tích (Reddy) [119]		0.3138

Chương 8 KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN

Trong luận án này, nhóm phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P lần đầu tiên được thiết lập để phân tích kết cấu dạng tấm/vòm. Cụ thể, phần tử SQ4H được

hình thành dựa vào kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc ba dạng C^0 , phần tử SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép, phần tử SQ4C dựa vào kỹ thuật tổ hợp biến dạng và phần tử SQ4P được xây dựng dựa trên đa thức Chebyshev. Kết quả của nghiên cứu hiện tại bao gồm:

- Phần tử phẳng tứ giác (SQ4H) để mô phỏng kết cấu tấm phẳng và tấm gập nhiều lớp, phần tử này cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa trên kỹ thuật nội suy kép (SQ4T) để mô phỏng kết cấu tấm/vỏ nhiều lớp hay tấm phân cấp chức năng. Với việc xây dựng hàm nội suy bậc cao dựa vào giá trị nút lần gradient trung bình nút trong phạm vi miền ảnh hưởng, phần tử này cải thiện được yếu tố bất liên tục của biến dạng và ứng suất qua biên của nó.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa vào kỹ thuật tổ hợp biến dạng (SQ4C) dùng để tính toán kết cấu tấm/vỏ nhiều lớp có hoặc không có sườn gia cường. Phần tử này cải thiện được độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về kết quả số liên quan đến hiện tượng khóa màng khi phân tích kết cấu vỏ.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa vào đa thức Chebyshev (SQ4P) dùng để phân tích kết cấu tấm/vỏ làm bằng vật liệu xếp phân cấp chức năng có gia cường tiêu cầu graphene. Kết quả phân tích không chỉ phụ thuộc vào lưới chia mà còn phụ thuộc vào bậc của đa thức Chebyshev.
- Các phần tử đều được thiết lập từ lý thuyết đơn lớp tương đương ESL (*equivalent single layer*) nên dễ dàng điều chỉnh đặc trưng vật liệu từ vật liệu đẳng hướng đến vật liệu composite nhiều lớp, vật liệu phân cấp chức năng, vật liệu xếp có gia cường...
- Các ma trận độ cứng màng, uốn, cắt và hình học đều được thiết lập để từ đó xác định ma trận độ cứng tổng của phần tử. Đặc biệt với các phần tử SQ4H và SQ4C, việc tính toán ma trận độ cứng uốn và hình học được thực hiện bởi tích phân dọc biên miền con của phần tử thay vì tích phân trực tiếp trên miền con như kỹ thuật truyền thống.
- Các phần tử đều khắc phục được hiện tượng khóa cắt (*shear locking*), khóa màng (*membrane locking*), đặc biệt khắc phục hiện tượng đồng hồ cát

(*hourglass phenomena* hay còn gọi là *spurious zero energy modes*) khi phân tích dao động tự do.

- Các phần tử đều có ưu và nhược điểm liên quan đến cách thức thiết lập tuy nhiên theo ý kiến chủ quan chúng có thể được xem xét như là các phần tử tứ giác đơn giản trong áp dụng.
- Căn cứ việc so sánh kết quả phân tích dựa trên 4 phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P với các kết quả được trích xuất từ các tài liệu uy tín và đáng tin cậy, chúng nên được mở rộng sang các hướng phân tích khác trong tương lai.

Trên nền tảng đã được thiết lập và xác minh, các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P có thể được sử dụng để tiếp tục phát triển theo các định hướng sau:

- Cải tiến kỹ thuật sâu hơn, áp dụng các công cụ tính toán hiện đại hơn, chuyển đổi lý thuyết tính toán hợp lý hơn.
- Đánh giá kỹ hơn các đặc tính về phương pháp tính của các phần tử đề xuất như: tốc độ hội tụ, sự đơn giản trong chia lưới, sự tương thích và ổn định của kết quả số cũng như chi phí tính toán.

Ngoài ra, các phần tử đề xuất có thể tiếp tục được mở rộng phạm vi phân tích số cho các bài toán cơ học khác như:

- Phân tích tuyến tính và phi tuyến hình học cho kết cấu tấm/vỏ có tích hợp lớp áp điện.
- Phân tích tuyến tính và phi tuyến hình học cho kết cấu tấm/vỏ làm bằng vật liệu xốp.
- Phân tích tương tác rắn-lỏng, ...
- Nghiên cứu ứng xử của kết cấu tấm/vỏ dưới tác dụng tổng hợp cơ-thủy-nhiệt.
- Phân tích cấu trúc vi mô trên cơ sở kết hợp với lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.
- Phân tích ứng xử đàn dẻo của kết cấu composite.
- Nghiên cứu phi tuyến vật liệu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. P. Timoshenko, *Theory Of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1987.
- [2] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2006.
- [3] E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. CRC Press, 2001.
- [4] H. N. Xuan, "A strain smoothing method in finite elements for structural analysis," PhD, University of Liege, Belgium, 2008.
- [5] H. Nguyen-Van, "Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures," PhD PhD thesis, 2009.
- [6] K. Darılmaz and N. Kumbasar, "An 8-node assumed stress hybrid element for analysis of shells," *Computers & Structures*, vol. 84, no. 29, pp. 1990-2000, 2006.
- [7] P.-S. Lee and K.-J. Bathe, "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements," *Computers & Structures*, vol. 82, no. 11, pp. 945-962, 2004.
- [8] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *The Finite Element Method*. McGraw-hill, 1977.
- [9] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques Of Finite Elements*. John Wiley & Sons, 1980.
- [10] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 367-383, 1985.
- [11] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 3, pp. 697-722, 1986.
- [12] K.-J. Bathe, F. Brezzi, and S. W. Cho, "The MITC7 and MITC9 Plate bending elements," *Computers & Structures*, vol. 32, no. 3, pp. 797-814, 1989.

- [13] B. M. Luiz and B. Klaus-Jüen, "Higher-order MITC general shell elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 21, pp. 3729-3754, 1993.
- [14] H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, N. Nguyen-Thanh, T. Nguyen-Thoi, and S. Bordas, "A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 46, no. 5, pp. 679-701, 2010.
- [15] H. Nguyen-Xuan, G. R. Liu, C. Thai-Hoang, and T. Nguyen-Thoi, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9, pp. 471-489, 2010.
- [16] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and C. Thai-Hoang, "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [17] G. Yang, D. Hu, X. Han, and G. Ma, "An extended edge-based smoothed discrete shear gap method for free vibration analysis of cracked Reissner–Mindlin plate," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 51, pp. 477-504, 2017.
- [18] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "A three-node mindlin plate element with improved transverse shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 71-101, 1985.
- [19] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, no. 3, pp. 311-335, 1983.
- [20] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Luong-Van, H. Nguyen-Van, and H. Nguyen-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 51, no. 1, pp. 65-81, 2013.

- [21] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 313, no. 1, pp. 205-223, 2008.
- [22] H. Nguyen-Van, H. L. Ton-That, T. Chau-Dinh, and N. D. Dao, "Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations," Singapore, 2018, pp. 461-475: Springer Singapore.
- [23] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "The MITC4+ shell element and its performance," *Computers & Structures*, vol. 169, pp. 57-68, 2016.
- [24] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new MITC4+ shell element," *Computers & Structures*, vol. 182, pp. 404-418, 2017.
- [25] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element," *Computers & Structures*, vol. 192, pp. 34-49, 2017.
- [26] U. Zrahia and P. Bar-Yoseph, "Plate spectral elements based upon Reissner–Mindlin theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, no. 8, pp. 1341-1360, 1995.
- [27] M. A. Sprague and A. Purkayastha, "Legendre spectral finite elements for Reissner–Mindlin composite plates," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 105, pp. 33-43, 2015.
- [28] K. D. Brito and M. A. Sprague, "Reissner–Mindlin Legendre spectral finite elements with mixed reduced quadrature," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 58, pp. 74-83, 2012.
- [29] T. Liu, Q. Wang, B. Qin, and A. Wang, "Free in-plane vibration of plates with arbitrary curvilinear geometry: Spectral-Chebyshev model and experimental study," *Thin-Walled Structures*, vol. 170, p. 108628, 2022.
- [30] D. He, T. Liu, B. Qin, Q. Wang, Z. Zhai, and D. Shi, "In-plane modal studies of arbitrary laminated triangular plates with elastic boundary constraints by the Chebyshev-Ritz approach," *Composite Structures*, vol. 271, p. 114138, 2021.

- [31] H. Dang-Trung, D.-J. Yang, and Y. C. Liu, "Improvements in Shear Locking and Spurious Zero Energy Modes Using Chebyshev Finite Element Method," *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 19, no. 1, 2018.
- [32] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen, "A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems," *Computational Mechanics*, journal article vol. 39, no. 6, pp. 859-877, 2007.
- [33] L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, no. 10, pp. 1222-1256, 2010.
- [34] T. T. Nguyen, G. R. Liu, K. Y. Dai, and K. Y. Lam, "Selective Smoothed Finite Element Method," *Tsinghua Science & Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 497-508, 2007.
- [35] T. Nguyen-Thoi, "Development Of Smoothed Finite Element Method (SFEM)," PhD, National University of Singapore, 2009.
- [36] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, H. Nguyen-Xuan, and K. Y. Lam, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems," *Computers & Structures*, vol. 87, no. 1, pp. 14-26, 2009.
- [37] T. Nguyen-Thoi, H. C. Vu-Do, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 45, pp. 3005-3027, 2010.
- [38] C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. Nguyen-Xuan, "Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 11, pp. 5657-5677, 2012.
- [39] L. G. R., C. L., N. T. T., Z. K. Y., and Z. G. Y., "A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of

- fracture problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 11, pp. 1466-1497, 2010.
- [40] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, and K. Y. Lam, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, no. 4, pp. 1100-1130, 2009.
- [41] T. T. Ngoc, L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "An edge-based smoothed finite element method for primal–dual shakedown analysis of structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82, no. 7, pp. 917-938, 2010.
- [42] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do, "Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method," *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3019-3039, 2011.
- [43] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, "Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements," *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162-173, 2016.
- [44] T. Chau-Dinh, Q. Nguyen-Duy, and H. Nguyen-Xuan, "Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis," *Acta Mechanica*, journal article vol. 228, no. 6, pp. 2141-2163, 2017.
- [45] N. T. T., P. V. P., N. X. H., and T. H. C., "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [46] L. C. V., N. X. H., A. H., B. S. P. A., R. T., and N. V. H., "A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 12, pp. 1651-1674, 2010.
- [47] C. Thai-Hoang, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, and S. Bordas, "A cell — based smoothed finite element method for free vibration

- and buckling analysis of shells," *KSCE Journal of Civil Engineering*, journal article vol. 15, no. 2, pp. 347-361, 2011.
- [48] T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and P. Ngo-Thanh, "Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements," *Computers & Structures*, vol. 125, pp. 100-113, 2013.
- [49] J. h. Lim, D. Sohn, and S. Im, *Variable-node element families for mesh connection and adaptive mesh computation*. 2012, pp. 349-370.
- [50] Y. S. Cho, S. Jun, S. Im, and H.-G. Kim, *An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes*. 2005, pp. 3022-3046.
- [51] T. Q. Bui, D. Q. Vo, C. Zhang, and D. D. Nguyen, "A consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4): Formulation and applications," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 84, pp. 14-31, 2014.
- [52] S. C. Wu, W. H. Zhang, X. Peng, and B. R. Miao, "A Twice-Interpolation finite element method (TFEM) for crack propagation problems," *International Journal of Computational Methods*, vol. 09, no. 04, p. 1250055, 2012.
- [53] C. Zheng, S. C. Wu, X. H. Tang, and J. H. Zhang, "A novel twice-interpolation finite element method for solid mechanics problems," *Acta Mechanica Sinica*, journal article vol. 26, no. 2, pp. 265-278, 2010.
- [54] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4135-4195, 2005.
- [55] N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 21, pp. 1892-1908, 2011.
- [56] N. Nguyen-Thanh *et al.*, "An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 265-291, 2015.

- [57] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 43, pp. 89-108, 2014.
- [58] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory," *Composite Structures*, vol. 104, pp. 196-214, 2013.
- [59] L. V. Tran, A. J. M. Ferreira, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 368-383, 2013.
- [60] P. Phung-Van, M. Abdel-Wahab, K. M. Liew, S. P. A. Bordas, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 123, pp. 137-149, 2015.
- [61] Y. Bazilevs *et al.*, "Isogeometric analysis using T-splines," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 5, pp. 229-263, 2010.
- [62] H. Gómez, V. M. Calo, Y. Bazilevs, and T. J. R. Hughes, "Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase-field model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 49, pp. 4333-4352, 2008.
- [63] Teodor M. Atanackovic and A. Guran, *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*. Springer Science+Business Media, 2000.
- [64] Timoshenko. SP and G. JM, *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [65] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells-Theory and analysis*. CRC Press, 2004.
- [66] N. V. Hau, "Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) dưới tác dụng tải trọng cơ nhiệt," PhD, HCMUTE, 2018.
- [67] Tran Ich Thinh and N. N. Khoa, *Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn*. Hà Nội, 2007.
- [68] H.-S. Shen, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, 2019.

- [69] T. Q. Bui *et al.*, "On the high temperature mechanical behaviors analysis of heated functionally graded plates using FEM and a new third-order shear deformation plate theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 92, pp. 218-241, 2016.
- [70] N. D. Duc, *Nonlinear static and dynamic stability of functionally graded plates and shells*. Vietnam National University, 2014.
- [71] K. A. Khor, Z. L. Dong, and Y. W. Gu, "Plasma sprayed functionally graded thermal barrier coatings," *Materials Letters*, vol. 38, no. 6, pp. 437-444, 1999.
- [72] W.-H. Lee, S.-C. Han, and W.-T. Park, "A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 122, pp. 330-342, 2015.
- [73] W.-Y. Jung and S.-C. Han, "Static and eigenvalue problems of Sigmoid Functionally Graded Materials (S-FGM) micro-scale plates using the modified couple stress theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 12, pp. 3506-3524, 2015.
- [74] K. Gao, W. Gao, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear dynamic buckling of the imperfect orthotropic E-FGM circular cylindrical shells subjected to the longitudinal constant velocity," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 138-139, pp. 199-209, 2018.
- [75] C. Betts, "Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review," *Materials Science and Technology*, vol. 28, no. 2, pp. 129-143, 2012.
- [76] L.-P. Lefebvre, J. Banhart, and D. C. Dunand, "Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments," *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, no. 9, pp. 775-787, 2008.
- [77] K. Li *et al.*, "Isogeometric Analysis of functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 114-130, 2018.
- [78] S. Sahmani, A. M. Fattahi, and N. A. Ahmed, "Analytical treatment on the nonlocal strain gradient vibrational response of postbuckled functionally

- graded porous micro-/nanoplates reinforced with GPL," *Engineering with Computers*, vol. 36, no. 4, pp. 1559-1578, 2020.
- [79] N. V. Nguyen, H. Nguyen-Xuan, D. Lee, and J. Lee, "A novel computational approach to functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement," *Thin-Walled Structures*, vol. 150, p. 106684, 2020.
- [80] K. Gao, W. Gao, D. Chen, and J. Yang, "Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 831-846, 2018.
- [81] M. A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, and N. Koratkar, "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content," *ACS Nano*, vol. 3, no. 12, pp. 3884-3890, 2009.
- [82] F. Ebrahimi and A. Dabbagh, "Vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates based on a Halpin-Tsai homogenization model," *Composites Part B: Engineering*, vol. 173, p. 106955, 2019.
- [83] Hieu Nguyen-Van, Nam Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "A simple and accurate four-node quadrilateral element using stabilized nodal integration for laminated plates," *CMC: Computers, Materials and Continua*, vol. 6, no. 3, pp. 159-176, 2007.
- [84] R. L. Taylor, "Finite element analysis of linear shell problems, in J. Whiteman (ed.)," in *Proceeding of the Mathematics in Finite Element and Applications*, 1987: Academic Press, New York.
- [85] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method, Vol. 2: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann-Oxford, 2000.
- [86] S. Mukherjee, Z. Bao, M. Roman, and N. Aubry, "Nonlinear mechanics of MEMS plates with a total Lagrangian approach," *Computers & Structures*, vol. 83, no. 10, pp. 758-768, 2005.
- [87] R. Zinno and E. J. Barbero, "Total Lagrangian formulation for laminated composite plates analysed by three-dimensional finite elements with two-dimensional kinematic constraints," *Computers & Structures*, vol. 57, no. 3, pp. 455-466, 1995.

- [88] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements," *Composite Structures*, vol. 72, no. 3, pp. 301-310, 2006.
- [89] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and Q. Lieu-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C0-type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates," *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 549-558, 2015.
- [90] N. S. Putcha and J. N. Reddy, "A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates," *Computers & Structures*, vol. 22, no. 4, pp. 529-538, 1986.
- [91] A. K. Upadhyay and K. K. Shukla, "Large deformation flexural behavior of laminated composite skew plates: An analytical approach," *Composite Structures*, vol. 94, no. 12, pp. 3722-3735, 2012.
- [92] G. Watts, S. Pradyumna, and M. K. Singha, *Nonlinear analysis of quadrilateral composite plates using moving kriging based element free Galerkin method*. 2016.
- [93] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Geometric non-linear analysis of folded plate structures by the spline strip kernel particle method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, no. 9, pp. 1102-1133, 2007.
- [94] "Element Reference. Ansys 6.1 Documentation."
- [95] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Analysis of Symmetrically Laminated Folded Plate Structures Using the Meshfree Galerkin Method," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 16, no. 1, pp. 69-81, 2009.
- [96] R. L. Spilker, D. M. Jakobs, and B. E. Engelmann, "Efficient hybrid stress isoparametric elements for moderately thick and thin multiplayer plates," *Hybrid and Mixed Finite Element Method*, vol. 73, pp. 113-122, 1985.
- [97] T. E. Wilt, A. F. Saleeb, and T. Y. Chang, "A mixed element for laminated plates and shells," *Computers & Structures*, vol. 37, no. 4, pp. 597-611, 1990.

- [98] G. Z. J. and C. W. J., "A refined discrete triangular Mindlin element for laminated composite plates," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 14, pp. 575-593, 2002.
- [99] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Two simple and efficient displacement-based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 11, pp. 1771-1796, 2004.
- [100] J. M. Whitney, "Bending-extensional coupling in laminated plates under transverse load," *Journal of Composite Materials*, vol. 3, pp. 398-411, 1969.
- [101] J. M. Whitney, "The effect of boundary conditions on the response of laminated composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pp. 192-203, 1970.
- [102] G. Singh, P. Raveendranath, and G. Vekateswara Rao, "An accurate four-node shear flexible composite plate element," vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [103] S. Gajbir, R. P., and V. R. G., "An accurate four-node shear flexible composite plate element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [104] W. Lanhe, L. Hua, and W. Daobin, "Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 68, no. 3, pp. 319-330, 2005.
- [105] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, and R. M. N. Jorge, "Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4265-4278, 2005.
- [106] K. M. Liew, Y. Q. Huang, and J. N. Reddy, "Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 19, pp. 2203-2222, 2003.
- [107] A. A. Khdeir and L. Librescu, "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration," *Composite Structures*, vol. 9, no. 4, pp. 259-277, 1988.

- [108] J. N. Reddy and N. D. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 98, no. 2, pp. 157-170, 1985.
- [109] K. M. Liew, "Solving The Vibration Of Thick Symmetric Laminates By Reissner/Mindlin Plate Theory And The p-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, no. 3, pp. 343-360, 1996.
- [110] A. J. M. Ferreira and G. E. Fasshauer, "Analysis of natural frequencies of composite plates by an RBF-pseudospectral method," *Composite Structures*, vol. 79, no. 2, pp. 202-210, 2007.
- [111] C. P. Wu and W. Y. Chen, "Vibration And Stability Of Laminated Plates Based On A Local High Order Plate Theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177, no. 4, pp. 503-520, 1994.
- [112] H. Matsunaga, "Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory," *Composite Structures*, vol. 48, no. 4, pp. 231-244, 2000.
- [113] K. N. Cho, C. W. Bert, and A. G. Striz, "Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 145, no. 3, pp. 429-442, 1991.
- [114] W. Zhen and C. Wanji, "Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global-local higher-order theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, no. 1, pp. 333-349, 2006.
- [115] K. M. J. J. o. S. Liew and Vibration, "Solving the vibration of thick symmetric laminates by REISSNER/MINDLIN plate theory and the p-RITZ method," vol. 198, pp. 343-360, 1996.
- [116] N. D. Phan and J. N. Reddy, "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 12, pp. 2201-2219, 1985.
- [117] M. L. Liu and C. W. S. To, "Free vibration analysis of laminated composite shell structures using hybrid strain based layerwise finite elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, no. 1, pp. 83-120, 2003.

- [118] S. Jayasankar, S. Mahesh, S. Narayanan, and C. Padmanabhan, "Dynamic analysis of layered composite shells using nine node degenerate shell elements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 1, pp. 1-11, 2007.
- [119] J. N. Reddy, "Exact solutions of moderately thick laminated shells," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 794-809, 1984.
- [120] L. Liu, L. P. Chua, and D. N. Ghista, "Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates," *Composite Structures*, vol. 78, no. 1, pp. 58-69, 2007.
- [121] A. K. Noor, "Stability of multilayered composite plates," *Fibre Science and Technology*, vol. 8, no. 2, pp. 81-89, 1975.
- [122] A. Chakrabarti and A. H. Sheikh, "Buckling of Laminated Composite Plates by a New Element Based on Higher Order Shear Deformation Theory," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 10, no. 4, pp. 303-317, 2003.
- [123] J. N. Reddy and A. A. Khdeir, "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories," *AIAA Journal*, vol. 27, no. 12, pp. 1808-1817, 1989.
- [124] L. R. Kumar, P. K. Datta, and D. L. Prabhakara, "Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading," *Composite Structures*, vol. 60, no. 2, pp. 171-181, 2003.
- [125] B. G. Prusty and S. K. Satsangi, "Finite element buckling analysis of laminated composite stiffened shells," *International Journal of Crashworthiness*, vol. 6, no. 4, pp. 471-484, 2001.
- [126] M. Di Sciuva and E. Carrera, "Static buckling of moderately thick, anisotropic, laminated and sandwich cylindrical shell panels," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 10, pp. 1782-1793, 1990.
- [127] V. N. Van Do and C.-H. Lee, "Nonlinear analyses of FGM plates in bending by using a modified radial point interpolation mesh-free method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 57, pp. 1-20, 2018.

- [128] H. Luong-Van, T. Nguyen-Thoi, G. R. Liu, and P. Phung-Van, "A cell-based smoothed finite element method using three-node shear-locking free Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) for dynamic response of laminated composite plates on viscoelastic foundation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 42, pp. 8-19, 2014.
- [129] X. Cui, G.-R. Liu, G.-y. Li, G. Zhang, and G. Zheng, "Analysis of plates and shells using an edge-based smoothed finite element method," *Computational Mechanics*, vol. 45, no. 2, p. 141, 2009.
- [130] D. J. Allman, "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Computers & Structures*, vol. 19, no. 1, pp. 1-8, 1984.
- [131] N. Nguyen-Minh, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and T. Vo-Duy, "Static and free vibration analyses of stiffened folded plates using a cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3)," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 266, pp. 212-234, 2015.
- [132] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor, and E. L. Wilson, "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 445-457, 1990.
- [133] C. W. S. To and B. Wang, "Hybrid strain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, no. 3, pp. 177-207, 1998.
- [134] T. Park, K. Kim, and S. Han, "Linear static and dynamic analysis of laminated composite plates and shells using a 4-node quasi-conforming shell element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 237-248, 2005.
- [135] B. R. Somashekar, G. Prathap, and C. R. Babu, "A field-consistent, four-noded, laminated, anisotropic plate/shell element," *Computers & Structures*, vol. 25, no. 3, pp. 345-353, 1987.
- [136] M. P. Rossow and A. K. Ibrahimkhail, "Constraint method analysis of stiffened plates," *Computers & Structures*, vol. 8, no. 1, pp. 51-60, 1978.

- [137] W. Zhao, "Buckling analysis of stiffened plates with straight and curvilinear stiffener(s).", Virginia Tech2013.
- [138] M. Feiz and A. F. Rohach, "Development of a type I Chebyshev polynomial nodal model for the multigroup diffusion equation in 1-D," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 16, no. 2, pp. 63-72, 1989.
- [139] X. Xu and C.-S. Zhang, "A new estimate for a quantity involving the Chebyshev polynomials of the first kind," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 476, no. 2, pp. 302-308, 2019.
- [140] R. L. Taylor and F. Auricchio, "Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II—A simple triangle," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 18, pp. 3057-3066, 1993.
- [141] Q. H. Nguyen, L. B. Nguyen, H. B. Nguyen, and H. Nguyen-Xuan, "A three-variable high order shear deformation theory for isogeometric free vibration, buckling and instability analysis of FG porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 245, p. 112321, 2020.
- [142] J. Yang, D. Chen, and S. Kitipornchai, "Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method," *Composite Structures*, vol. 193, pp. 281-294, 2018.
- [143] F. Abbassian, D. J. Dawswell, and N. C. Knowles, "Free vibration benchmarks Softback," Atkins Engineering Sciences, Glasgow1987.
- [144] N. Kumbasar and T. Aksu, "A finite element formulation for moderately thick shells of general shape," *Computers & Structures*, vol. 54, no. 1, pp. 49-57, 1995.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ

1. H Nguyen-Van, HL Ton-That, T Chau-Dinh, ND Dao. Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations. *Proceedings of the International Conference on Advances in Computational Mechanics*, Springer, Singapore, **Scopus**, pp. 461-475, 2017.
2. HL Ton-That, TK Nguyen, H Nguyen-Van. Phân tích ứng xử tĩnh tâm composite đa lớp dựa trên một lý thuyết tâm biến dạng cắt bậc cao. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.
3. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Phân tích dao động tự do của vỏ có sườn gia cường bằng phần tử tứ giác MISQ24. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.
4. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using SQ4T Elements based on Twice Interpolation Strategy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **ESCI**, **Q1**, Vol. 6(1), pp. 125-136, 2020.
5. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh, C Huynh-Van. Enhancement to four-node quadrilateral plate elements by using cell-based smoothed strains and higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of composite structures. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **SCIE**, **Q1**, Vol. 22(7), pp. 2302-2329, 2020.
6. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. An Improved Four-Node Element for Analysis of Composite Plate/Shell Structures Based on Twice Interpolation Strategy. *International Journal of Computational Methods*, **SCIE**, **Q2**, Vol. 17(6), p. 1950020, 2020.
7. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Static and buckling analyses of stiffened plate/shell structures using the quadrilateral element SQ4C. *Comptes Rendus. Mécanique*, **SCIE**, **Q3**, Vol. 348(4), pp. 285-305, 2020.
8. HL Ton-That, H Nguyen-Van. A Combined Strain Element in Static, Frequency and Buckling Analyses of Laminated Composite Plates and Shells.

Periodica Polytechnica Civil Engineering, **SCIE**, **Q4**, Vol. 65(1), pp. 56-71, 2021.

9. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. A novel quadrilateral element for analysis of functionally graded porous plates/shells reinforced by graphene platelets. *Archive of Applied Mechanics*, **SCIE**, **Q3**, Vol. 91(6), pp. 2435-2466, 2021.

MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
HCMC UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION

TON THAT HOANG LAN

**DEVELOPMENT OF FINITE ELEMENT TECHNIQUES FOR PLATE
AND SHELL STRUCTURAL ANALYSIS**

Major: Engineering Mechanics

Major code: 9520101

SUMMARY OF PHD. DISSERTATION

HO CHI MINH CITY - 2022

This work was completed at **HCMC University of Technology and Education**

Supervisor 1: Assoc. Prof. PhD. NGUYEN VAN HIEU

Supervisor 1: Assoc. Prof. PhD. CHAU DINH THANH

Reviewer 1:

Reviewer 2:

Reviewer 3:

The dissertation will be defended in front of the Council for evaluation of PhD
dissertation at room ...

HCMC University of Technology and Education

on .../.../...

ABSTRACT

Plates and shells are common structures in real life, they are used as roofs, floors, walls, silos, tanks, etc. Among the numerical methods used to simulate as well as analyze the mechanical behavior of plate and shell structures, the finite element method (FEM) is the most widely used and effective method. With the continuous emergence of new complex problems, FEM still has certain limitations related to discrete element techniques, accuracy, stability, computational cost, flexibility, etc. Therefore, it is always important to suggest technical improvements to FEM in plate/shell behavior simulation. This research direction has always been topical from the past decades to now. With the desire to further diversify, create more hybrid elements, integrate from the advantages of existing elements, this thesis is formed. Besides, the goal of the study is to create a simple set of 4-node quadrilateral elements in the formulation for plate/shell analysis, which is less affected by the phenomena of membrane locking, shear locking, etc. The main contributions of this thesis can be listed as follows:

- Constructing a 4-node quadrilateral element, namely SQ4H, based on cellbased strain smoothing enhancement combined with the type of C0-HSDT for nonlinear analysis of plate and folded plate structures. This element improves model accuracy and reduces numerical instability for geometrically nonlinear analysis.
- Constructing a 4-node quadrilateral element, namely SQ4T, based on twice interpolation strategy (TIS) for linear and nonlinear analysis of plate/shell structures. By establishing high-order shape functions that take into account the influence of the group of neighboring nodes on the considering element, this element improves the discontinuity of its strain and stress across its boundaries.
- Under the combined strain strategy with respect to overcoming membrane locking as well as shear locking phenomenon and using cell-based strain smoothing enhancement, the third contribution is to build a 4-node quadrilateral element, namely SQ4C, for analysis of plate and shell structures with or without

stiffeners. This element improves model accuracy and reduces numerical instability associated with membrane locking when analyzing shell structures.

- Based on the outstanding properties of Chebyshev polynomials, the last contribution is to give a 4-node quadrilateral element, namely SQ4P, with the goal throughout the thesis to analyze the behavior of plate and shell structures. Improved numerical results based on the mesh and the order of Chebyshev polynomials.

LIST OF ACRONYMS

SQ4H	The Sort of Q4 element based on Higher-order shear deformation theory
SQ4T	The Sort of Q4 element based on Twice interpolation strategy
SQ4C	The Sort of Q4 element based on Combined strain strategy
SQ4P	The Sort of Q4 element based on Chebyshev Polynomial
FEM	Finite Element Method
FGM	Functionally Graded Material
FGP	Functionally Graded Porous
GPLs	Graphene PlateLets
P-S	Symmetric Porosity distribution
P-A	Asymmetric porosity distribution
P-U	Uniform Porosity distribution
GPL-S	Graphene PlateLet Symmetric distribution
GPL-A	Graphene PlateLet Asymmetric distribution
GPL-U	Graphene PlateLet Uniform distribution
TIS	Twice interpolation strategy
FSDT	First-order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher-order Shear Deformation Theory
HBQ8	8-node Quadrilateral Assumed-Stress Hybrid Shell element
KUMBA	8-node Curved Shell element with Reduced Integration

PREFACE

1. Rationale

Based on the continuous emergence of new complex problems (related to new materials, more precise boundary conditions, or more complex interaction conditions, etc.), FEM still has certain limitations related to discrete element techniques, accuracy, stability, computational cost, flexibility, etc. Therefore, it is always important to suggest technical improvements to FEM in plate/shell behavior simulation.

2. Research task

Development of finite element techniques for plate/shell structural analysis.

3. Research scope

Static bending, free vibration, buckling analysis of plate/shell structures based on proposed elements.

4. Research approach and methods

- Theoretical research
- Development of finite element techniques
- Numerical simulation
- Analyze and evaluate the results.

5. Scientific and practical significance of the research theme

This thesis develops the necessary calculation techniques at present when computational techniques are increasingly applied in practice, with the objects being plate/shell structures in engineering. From the research results of the thesis, the proposed elements can be added into the modules of existing softwares.

6. Dissertation outline

Thesis includes: Preface; Chapter 1: Introduction; Chapter 2: Theoretical basis; Chapters 3, 4, 5 and 6: SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P Elements; Chapter 7: Error estimates among the proposed elements, Chapter 8: Conclusions and future works together with the References and the List of publications.

Chapter 1 INTRODUCTION

Plates and shells are common structures in real life, they are used as roofs, floors, walls, silos, tanks, etc. *Figure 1.1* [1-3]. Among the numerical methods used to simulate as well as analyze the mechanical behavior of plate and shell structures [4-144], the finite element method (FEM) is the most widely used and effective method.

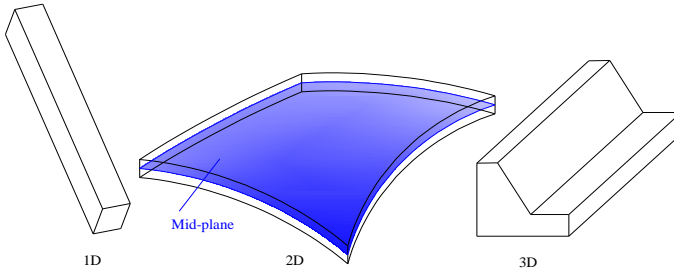


Figure 1.1: 1D, 2D and 3D structures

This thesis creates a simple set of 4-node quadrilateral elements in the formulation for plate/shell analysis, namely, SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P. The thesis consists of eight chapters with a list of publications and references.

Chapter 2 THEORETICAL BASIS

Materials: Isotropic material [1-4, 6, 7], composite material [5, 21, 22, 38, 65], functionally graded material FGM [66-74] and functionally graded porous FGP (P-S, P-A, P-U) reinforced by graphene platelets GPLs (GPL-S, GPL-A, GPL-U) [68-82, 141, 142].

Plate/Shell theories: FSDT and HSDT [2, 65, 108, 116, 119, 123].

Finite element formulation: Based on [4, 5, 35], the weak form formulas for a 4-node isoparametric quadrilateral membrane element and a 4-node quadrilateral plate bending element including shear strain, lead to a 4-node flat shell element, as *Figure 2.15, 2.16 & 2.17* are presented in this thesis.

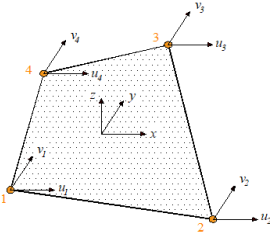


Figure 2.15: A 4-node isoparametric quadrilateral membrane element

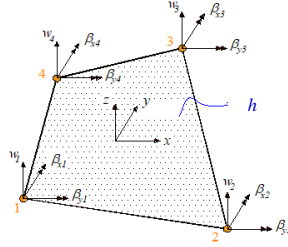


Figure 2.16: A 4-node quadrilateral plate bending element

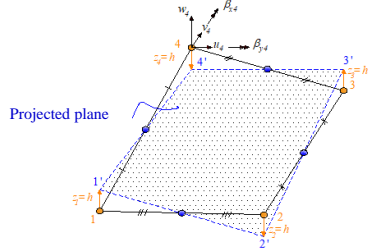


Figure 2.17: The projection of a warped shell element into a flat mean plane

Chapter 3 SQ4H ELEMENT

The HSDT of Reddy is presented

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0 + z\beta_y - (4/3h^2)z^3(\beta_y + \partial w_0 / \partial x) \\
 v(x, y, z) &= v_0 - z\beta_x - (4/3h^2)z^3(-\beta_x + \partial w_0 / \partial y) \\
 w(x, y, z) &= w_0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Expressing $\partial w_0 / \partial x = \phi_x$ and $\partial w_0 / \partial y = \phi_y$, equation (3.6) can be rewritten as

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0 + (z - 4z^3/3h^2)\beta_y - (4z^3/3h^2)\phi_x \\
 v(x, y, z) &= v_0 - (z - 4z^3/3h^2)\beta_x - (4z^3/3h^2)\phi_y \\
 w(x, y, z) &= w_0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Finite element formulas applied to HSDT often require a higher-order continuous approximation. This leads to complexity when establishing the finite element approximation function. To overcome this, Reddy proposed a different calculation form applicable to HSDT that only requires C^0 continuity for displacement fields, called C^0 -HSDT. In the C^0 -HSDT, two additional variables are joined. According to equation (3.7), The displacement field includes seven unknown variables as $u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_y, \phi_x$ and ϕ_y , *Figure 3.1*. The SQ4H element is formed based on cell-based strain smoothing enhancement combined with the type of C^0 -HSDT and the small strain-large displacement theory of Von Karman for nonlinear analysis of mechanical problems.

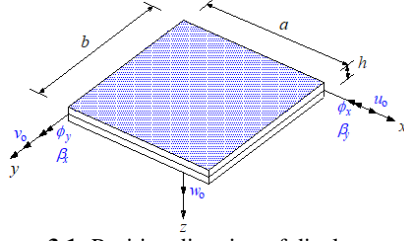


Figure 3.1: Positive direction of displacements

The strain field is obtained

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + w_{,x}^2 / 2 \\ v_{,y} + w_{,y}^2 / 2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} - \frac{4}{3h^2} z^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_{0,x}^2 / 2 \\ w_{0,y}^2 / 2 \\ w_{0,x} w_{0,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^L + \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{0,x} & 0 \\ 0 & w_{0,y} \\ w_{0,y} & w_{0,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b1} = \begin{bmatrix} \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} = \begin{bmatrix} \beta_{y,x} + \phi_{x,x} \\ -\beta_{x,y} + \phi_{y,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} + \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} + z^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} = \begin{bmatrix} w_{0,x} + \beta_y \\ w_{0,y} - \beta_x \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} = -\frac{4}{h^2} \begin{bmatrix} \phi_x + \beta_y \\ \phi_y - \beta_x \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Geometrically nonlinear analysis

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^L + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{NL} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L & \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

The displacement field \mathbf{u} of the element is approximated through $\mathbf{q}_i^T = [u_i \ v_i$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} w_i & \beta_{xi} & \beta_{yi} & \phi_{xi} & \phi_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \mathbf{q}_i, \quad N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (3.16)$$

The membrane, bending and shear strain vectors can be expressed in the following form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^L = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^L \mathbf{q}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{b1i} \mathbf{q}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{b2i} \mathbf{q}_i \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^{NL} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s1i} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s2i} \mathbf{q}_i \\
\mathbf{B}_{mi}^L &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{b1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{b2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{mi}^{NL} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G}_i &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{s1i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & -N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{s2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Based on the cell-based strain smoothing technique according to the authors Nguyen-Xuan, Nguyen-Thoi, Nguyen-Van, etc. [4, 5, 14-17, 20-22, 35, 83, 128, 129] and *Figure 3.3*

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{A_c} \sum_{m=1}^4 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_y & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bm}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_m^c \tag{3.25}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^{NL} = \tilde{\boldsymbol{\Psi}} \tilde{\mathbf{G}}_i, \quad \tilde{\mathbf{G}}_i = \frac{1}{A_c} \sum_{g=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I_g^c,$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x I_j^c w_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y I_j^c w_i \\ \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y I_j^c w_i & \frac{1}{A_c} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x I_j^c w_i \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{b1i} = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & 0 & 0 \end{pmatrix} l_b \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{b2i} = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x \end{pmatrix} l_b$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s1i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} N_i(\mathbf{x}) n_x d\Gamma & 0 & N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} N_i(\mathbf{x}) n_y d\Gamma & -N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) & N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

with nG is the number of Gauss integration points, \mathbf{x}_{bn} the Gauss points, w_n the corresponding weighting coefficients and w_i the deflection at the node i of the element. The element tangent stiffness matrix is defined as [83-94]

$$\tilde{\mathbf{K}}_T = \tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_{NL} + \tilde{\mathbf{K}}_g \quad (3.33)$$

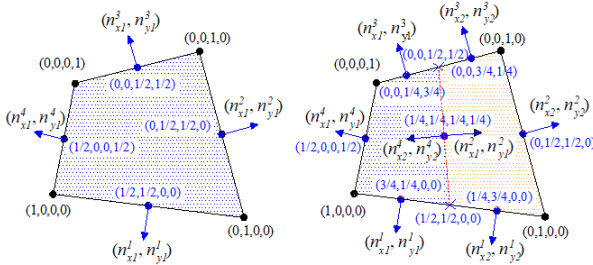


Figure 3.3: $n_c=1$ & 2 and the values of shape functions at nodes in the format $(N_1; N_2; N_3; N_4)$. Finally, the nonlinear equation can be rewritten as

$${}^t \tilde{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - {}^t \mathbf{F}, \quad {}^t \tilde{\mathbf{F}} = \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_{NL})^t \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega, \quad {}^t \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^* = {}^t \boldsymbol{\sigma}_i^* + {}^t \Delta \boldsymbol{\sigma}^* \quad (3.35)$$

Chapter 4 SQ4T ELEMENT

TIS was first introduced by the authors Zheng, Bui Q.T, etc [51-53]. This technique establishes high-order shape functions that take into account the influence of the group of neighboring nodes on the considered element, which can match with irregular mesh in some types of problems. The results converge

with quite high accuracy and the resulting stress field is continuous across the element boundary. The difference between FEM based on TIS compared to the traditional one can be seen in *Figures 4.1, 4.2 & 4.3*.

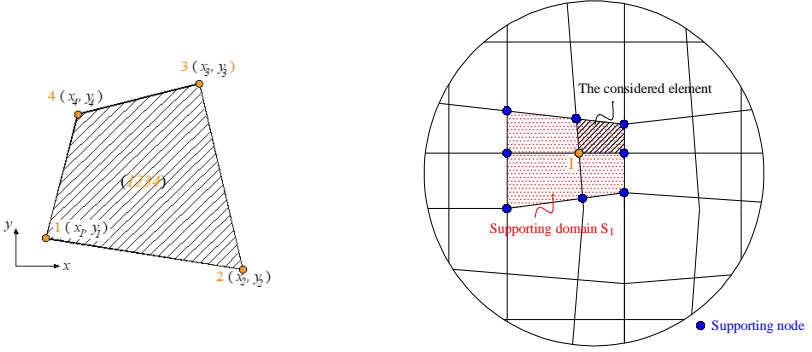


Figure 4.1: A 4-node quadrilateral element

Figure 4.2: Supporting domain of node 1



Figure 4.3: Visualization of the shape functions: a) traditional, b) TIS strategies [51]

The displacement field is approximated as

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{sp}} \tilde{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i = & \underbrace{\varepsilon_1 N_i^{[1]} + \varepsilon_{1x} \bar{N}_{i,x}^{[1]} + \varepsilon_{1y} \bar{N}_{i,y}^{[1]}}_{\text{node 1}} + \underbrace{\varepsilon_2 N_i^{[2]} + \varepsilon_{2x} \bar{N}_{i,x}^{[2]} + \varepsilon_{2y} \bar{N}_{i,y}^{[2]}}_{\text{node 2}} \\ & + \underbrace{\varepsilon_3 N_i^{[3]} + \varepsilon_{3x} \bar{N}_{i,x}^{[3]} + \varepsilon_{3y} \bar{N}_{i,y}^{[3]}}_{\text{node 3}} + \underbrace{\varepsilon_4 N_i^{[4]} + \varepsilon_{4x} \bar{N}_{i,x}^{[4]} + \varepsilon_{4y} \bar{N}_{i,y}^{[4]}}_{\text{node 4}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\bar{N}_{i,x}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,x}^{[1]e}), \quad \bar{N}_{i,y}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,y}^{[1]e}), \quad \omega_e = A_e / \sum_{\tilde{e} \in S_1} A_{\tilde{e}} \quad \text{v} \acute{o}i \quad e \in S_1 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = & N_1 + N_1^2 N_2 + N_1^2 N_3 + N_1^2 N_4 - N_1 N_2^2 - N_1 N_3^2 - N_1 N_4^2 \\ \varepsilon_{1x} = & -(x_1 - x_2) (N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4) \\ & -(x_1 - x_3) (N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4) \\ & -(x_1 - x_4) (N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Iy} = & -(y_1 - y_2) \left(N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4 \right) \\
& - (y_1 - y_3) \left(N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4 \right) \\
& - (y_1 - y_4) \left(N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3 \right) \\
N_i = & (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) / 4, \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned} \tag{4.5}$$

These functions associated with node 1 satisfy the following conditions

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(\mathbf{x}_i) = \delta_{1i}, \quad \varepsilon_{1,x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,x,x}(\mathbf{x}_i) = \delta_{1i}, \\
\varepsilon_{1,x,y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,y}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,y,x}(\mathbf{x}_i) = 0, \quad \varepsilon_{1,y,y}(\mathbf{x}_i) = \delta_{1i} \\
\delta_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Constructing a 4-node quadrilateral element with 5 degrees of freedom for each node, namely SQ4T, and applying FSDT, the linear and nonlinear strains can be shown

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) = & \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},y} & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5 n_{sp}} \\
\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & \tilde{N}_{n_{sp},x} \end{bmatrix}_{3 \times 5 n_{sp}} \\
\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & \tilde{N}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & \tilde{N}_{n_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & \tilde{N}_1 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & \tilde{N}_{n_{sp}} \end{bmatrix}_{2 \times 5 n_{sp}} \\
\mathbf{q}_e = & \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \beta_{xi} & \beta_{yi} \end{bmatrix}_{(i=1:n_{sp})}^T
\end{aligned} \tag{4.17}$$

In case of nonlinear bending analysis

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m^{NL}(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e, \quad \mathbf{B}_m^{NL} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G} \\
\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5 n_{sp}}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{i,x} w_i & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{i,y} w_i \\ \tilde{N}_{i,y} w_i & \tilde{N}_{i,x} w_i \end{bmatrix}_{(i=1:n_{sp})}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

The element tangent stiffness matrix is defined as

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_{gNL} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{K}_L = \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_L d\Omega, \mathbf{K}_{NL} = \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_{NL} d\Omega, \mathbf{K}_{gNL} = \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{N}} \mathbf{G} d\Omega$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^L \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{NL} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}, \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

The nonlinear equation is presented similarly with (3.35).

Chapter 5 SQ4C ELEMENT

In the plate/shell studies with FSDT, a great concern is the appearance of shear locking phenomenon as the thickness-to-span ratio of the structure becomes too small due to shear strain energy being not removed. To overcome this phenomenon, according to the authors Bathe and Dvorkin [10, 11], consider the transverse shear strain as constant along the edges of the element as shown in *Figure 5.1*. The transverse shear strain field is built through the 4 tying points *A, B, C* and *D* according to the formulas

$$\tilde{\epsilon}_s^\xi = \frac{1}{2}(1+\eta)\epsilon_s^{\xi(D)} + \frac{1}{2}(1-\eta)\epsilon_s^{\xi(B)}$$

$$\tilde{\epsilon}_s^\eta = \frac{1}{2}(1+\zeta)\epsilon_s^{\eta(C)} + \frac{1}{2}(1-\zeta)\epsilon_s^{\eta(A)}$$
(5.1)

in which $\epsilon_s^{\xi(A)}$, $\epsilon_s^{\xi(B)}$, $\epsilon_s^{\eta(C)}$, $\epsilon_s^{\eta(D)}$ are the transverse shear strains calculated directly through displacement approximation at the tying points.

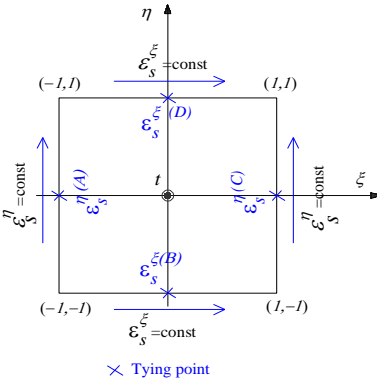


Figure 5.1: Tying positions for the assumed transverse shear strains

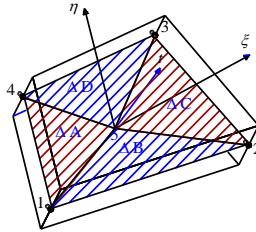


Figure 5.2: The basis of defining virtual node 5

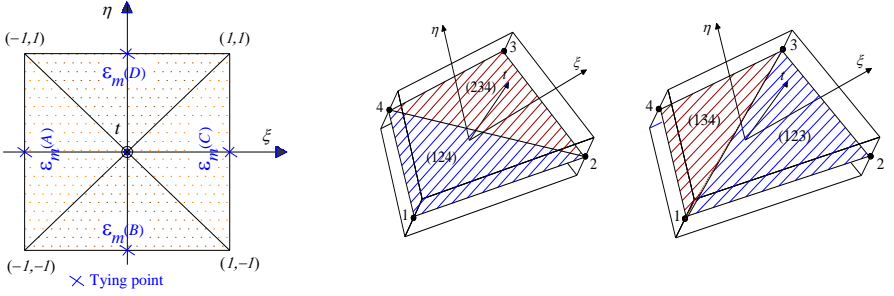


Figure 5.3: Tying points corresponding to the four non-overlapping triangular domains

In addition, when analyzing a shell with a certain curvature and distorted mesh, it is easy to lead to the membrane locking phenomenon because the element used is a low-order quadrilateral element. To overcome this phenomenon, according to the authors Ko and Lee [23, 24], divide the element domain at the neutral surface into 4 sub-triangle domains as shown in *Figure 5.2*. Virtual node 5 is calculated through 4 areas “124”, “234”, “134” và “123”

$$\mathbf{x}_5 = \sum_{i=1}^4 \zeta_i \mathbf{x}_i$$

$$[\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_3 \quad \zeta_4] = \frac{1}{2} \frac{A_{234}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{124}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{A_{134}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{123}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

The membrane strain field is built through the 4 tying points A , B , C and D according to the formulas and *Figure 5.3*

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}) \xi + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) \eta \quad (5.5)$$

with $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)}$, $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)}$, $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}$ and $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}$ are membrane strains calculated through 4 sub-triangle domains and located at 4 tying points A , B , C and D . It should be noted that at virtual node 5 no auxiliary degrees of freedom are added. Combining the technique of smoothed bending strains as shown in *Figure 3.3*, the SQ4C element is formed on the basis of a combination of membrane, bending and shear strains. The membrane strains are determined as

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \bar{\mathbf{B}}_m \mathbf{q}_m \quad (5.13)$$

with $\bar{\mathbf{B}}_m$ is related to $\bar{\mathbf{B}}_m^{(A)}$, $\bar{\mathbf{B}}_m^{(B)}$, $\bar{\mathbf{B}}_m^{(C)}$ and $\bar{\mathbf{B}}_m^{(D)}$ of 4 sub-triangle domains. The bending strains are given

$$\tilde{\mathbf{e}}_b(\mathbf{x}_C) = \tilde{\mathbf{B}}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_b$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bi}(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y \\ 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x \end{pmatrix} l_b^C \quad (5.14)$$

A_C is the area of the smoothing cell, \mathbf{x}_b^G is Gauss point, l_b^C is the length of edge, note that 2 is the number of smoothing cells. The transverse shear strains are also established

$$\tilde{\mathbf{e}}_s = \tilde{\mathbf{B}}_s \mathbf{q}_s \quad (5.17)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{st} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & b_i^{11} N_{i,\xi} & b_i^{12} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} & b_i^{21} N_{i,\eta} & b_i^{22} N_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

$$b_i^{11} = \xi_i x_{,\xi}^{R_1}, \quad b_i^{12} = \xi_i y_{,\xi}^{R_1}, \quad b_i^{21} = \eta_i x_{,\eta}^{R_2}, \quad b_i^{22} = \eta_i y_{,\eta}^{R_2} \quad (5.18)$$

$$\xi_i \in \{-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1\}, \quad \eta_i \in \{-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1\}$$

$$(i, R_1, R_2) \in \{(1, B, A), (2, B, C), (3, D, C), (4, D, A)\}$$

The global stiffness matrix is shown

$$\tilde{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_m + \tilde{\mathbf{K}}_{mb} + \tilde{\mathbf{K}}_s^T + \tilde{\mathbf{K}}_b + \bar{\mathbf{K}}_s \quad (5.20)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{K}}_{mb} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega, \quad \tilde{\mathbf{K}}_b = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega = \sum_{i=1}^{n_s} \tilde{\mathbf{B}}_{bi}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_{bi} A_C$$

$$n_c = 2, \quad \bar{\mathbf{K}}_s = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{C}_s \bar{\mathbf{B}}_s d\Omega \quad (5.21)$$

In the case of connecting with stiffeners, the SQ4C element is added a 6th degree of freedom β_z for each node according to [5, 48, 130-132]. Matrix $\bar{\mathbf{K}}_m$ is rewritten

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{b} d\Omega, \quad \gamma = G \quad (5.25)$$

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} N_{i,y} \\ -\frac{1}{2} N_{i,x} \\ -\frac{1}{2} (N x_{i,y} + N y_{i,x}) - N_i \end{bmatrix}, \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5.26)$$

$$N x_i = \frac{1}{8} (y_{ij} N_l - y_{ik} N_m), \quad N y_i = \frac{1}{8} (x_{ij} N_l - x_{ik} N_m), \quad x_{ij} = x_j - x_i, \quad y_{ij} = y_j - y_i$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad m = i + 4; \quad l = m - 1 + 4 * \text{floor}(1/i); \quad k = \text{mod}(m, 4) + 1; \quad j = l - 4; \quad (5.27)$$

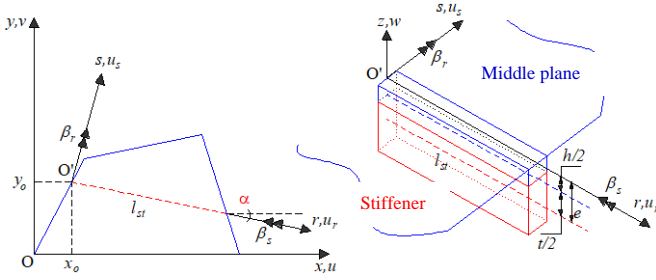


Figure 5.5: Description of a stiffened plate structure

Using Timoshenko beam theory to calculate stiffener. For general cases, we consider a stiffener that is placed askew an angle α to x -axis as shown in *Figure 5.5*. The length of the stiffener element l_{st} is limited to the quadrilateral element SQ4C and depending on the mesh of plate, h and t are the plate thickness and the height of the stiffener, respectively. A local coordinate $O'rsz$ having $O'rs$ plane coincides with the Oxy plane. We assume that the displacements of stiffeners and plate are the same at the contact positions. The relationship between the local coordinate and the global coordinate as well as the strains of stiffener are presented

$$\mathbf{u}_{st} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (5.28)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\mathbf{u} \quad (5.29)$$

e is the eccentricity between the mid-plane of plate and the centroid of beam. By using the two-node isoparametric Timoshenko beam element to model the stiffener

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 N_i^{st} \mathbf{I}_6 \mathbf{q}_i^{st} \quad (5.30)$$

$N_1^{st} = (1 - \xi)/2$ and $N_2^{st} = (1 + \xi)/2$ are the linear shape functions in natural coordinates. The stiffness and geometric matrices are given as

$$\mathbf{K}_e^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\phi} \mathbf{N}^{st})^T \mathbf{D}^{st} \boldsymbol{\phi} \mathbf{N}^{st} dl, \quad \mathbf{K}_{eg}^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\phi} \mathbf{N}^{st})^T \boldsymbol{\sigma}^{st} \boldsymbol{\phi} \mathbf{N}^{st} dl \quad (5.31)$$

$$\mathbf{D}^{st} = \text{diag}(EA_{st}, EI_s, 5GA_{st}/6, GJ), \quad \boldsymbol{\sigma}^{st} = \text{diag}(A_{st}\sigma_x^0, (I_s + e^2 A_{st})\sigma_x^0) \quad (5.33)$$

A_{st} is the cross-section area of stiffener, I_s is the second moment of stiffener cross-sectional area about an axis which goes through the centroid of the stiffener and is parallel with the s -axis, $J \approx A_{st}^4 / 40I_r$ is St.Venant's torsion constant and I_r is the second moment of stiffener cross-sectional area about an axis which goes through the centroid of the stiffener and is parallel with the r -axis, besides, E , G are material constants.

Chapter 6 SQ4P ELEMENT

The Chebyshev polynomials of the first kind are defined by [31, 138, 139]

$$T_p(x) = T_p(\cos\theta) = \cos p\theta \quad (6.1)$$

with $-1 \leq x = \cos\theta \leq 1$ and

$$\cos(p+1)\theta = 2\cos\theta\cos p\theta - \cos(p-1)\theta \quad (6.2)$$

From equations (6.1) and (6.2)

$$T_{p+1}(x) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

The polynomial $T_p(x)$, with $p \geq 2$, vanishes at the points x_i defined by

$$x_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p], \quad i = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow T_p(x_i) = 0 \quad (6.4)$$

Attempting to approximate an unknown function $f(x)$ based on Lagrangian interpolation polynomial $Y(x)$ through the known points $(x_k, f(x_k))$ using Chebyshev polynomials as follows

$$f(x) \approx Y(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i T_i(x) \quad \text{and} \quad f(x_k) = Y(x_k) \quad (6.5)$$

Using the orthogonal property of Chebyshev polynomials on the interval $[-1, 1]$

$$a_i = \frac{\sum_{k=1}^p f(x_k) T_i(x_k)}{\sum_{k=1}^p T_i^2(x_k)} \quad (6.6)$$

$$Y(x) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{p-1} \left[(T_i(x_k) T_i(x)) / \sum_{j=1}^p T_i^2(x_j) \right] f(x_k)$$

Expressing $x = \cos(\pi/2p)\xi$

$$Y(\xi) = \sum_{k=1}^p N_k^{Che}(\xi) f(\xi_k) \quad (6.8)$$

One-dimensional shape function $N_k^{Che}(\xi)$ is defined by

$$N_k^{Che}(\xi) = \sum_{i=0}^{p-1} \left[T_i(\cos(\pi/2p)\xi_k) T_i(\cos(\pi/2p)\xi) \right] / \sum_{j=1}^p T_i^2(\cos(\pi/2p)\xi_j) \quad (6.9)$$

$$\xi_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p] / \cos(\pi/2p), \quad i=1,2,\dots,p$$

For two-dimensional problems, the parameter space is defined by

$$(\xi, \eta) \in [-1,1] \times [-1,1] \quad (6.11)$$

So the shape function associated with node $I(\xi_i, \eta_j)$ in parameter space is defined by

$$N_I^{Che}(\xi, \eta) = N_i^{Che}(\xi) N_j^{Che}(\eta) \quad (6.12)$$

where $N_i^{Che}(\xi)$ is one-dimensional p_1 -order shape functions defined on the set $\xi \in [-1,1]$ và $N_j^{Che}(\eta)$ is one-dimensional p_2 -order shape functions defined on the set $\eta \in [-1,1]$. *Figure 6.1* shows the third-order and fourth-order shape functions in 1D. The 4-node quadrilateral SQ4P element with 5 degrees of freedom per node is built based on FSDT and Chebyshev polynomials. The number of $[(p_1+1)(p_2+1)-4]$ virtual nodes is added to the element domain as depicted in *Figures 6.2 & 6.3*.

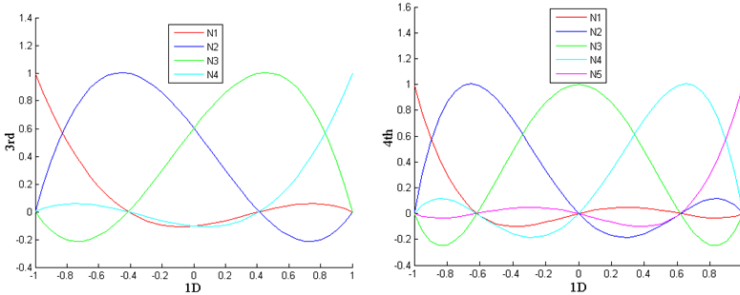


Figure 6.1: Third-order and fourth-order shape functions in 1D

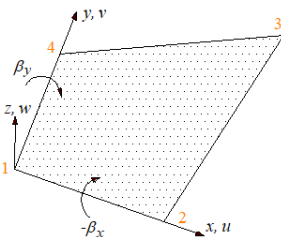


Figure 6.2: Positive direction of

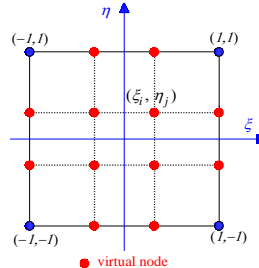


Figure 6.3: SQ4P element in natural

displacements

coordinate system with $p_1=p_2=3$

The membrane, bending and shear strains can be obtained

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (6.18)$$

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \beta_{xi} & \beta_{yi} \end{bmatrix}_{(i=1, \dots, (p_1+1)(p_2+1))}^T$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (6.20)$$

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (6.22)$$

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & N_1^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & N_1^{Che} & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} \end{bmatrix}_{2 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.23)$$

The global stiffness matrix is presented

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{B} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s d\Omega \quad (6.24)$$

For shell structures, the in-plane rotational displacement component is added to the local stiffness matrix. The null values of the stiffness corresponding to this degree of freedom are assigned approximate values, usually 10^{-3} times the maximum diagonal value in the element stiffness matrix. In this thesis, the full quadrature rule is implemented, so the number of Gaussian points used for each element is $(p_1+1)(p_2+1)$ and the corresponding total degrees of freedom for each element is $5(p_1+1)(p_2+1)$, obviously $6(p_1+1)(p_2+1)$ for shell.

Chapter 7 ERROR ESTIMATES AMONG THE PROPOSED ELEMENTS

An isotropic plate subjected to uniform load:

The square plate as shown in *Figure 7.1* with two kinds of boundary condition as simply supported (SSSS) and clamped (CCCC) under the change of the length to thickness ratio $a/h = 10, 100, 1000, 10000$ is analyzed. It is

subjected to a uniformly distributed load q with material properties such as $E = 1.092 \text{ Mpa}$ and $\mu = 0.3$. The normalized central deflection is calculated by $w^* = (100Eh^3w_c)/[12qa^4(1-\mu^2)]$. Comparison the results when using four elements: SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P. The exact solution is referenced from the literature [140] of the author Taylor *et al.*

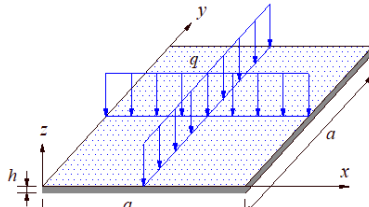
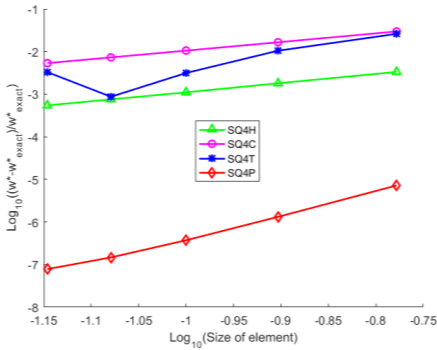
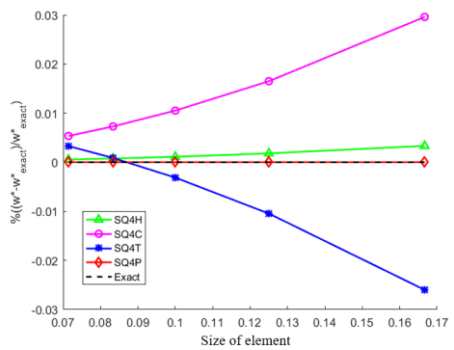


Figure 7.1: A square plate under uniformly distributed load

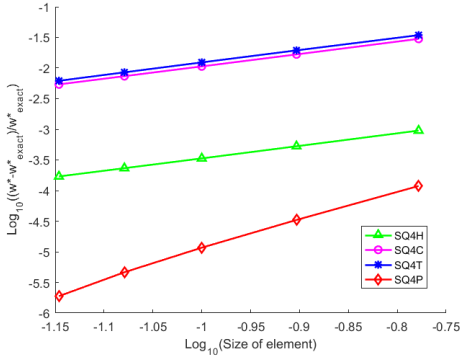
Figures 7.2.a-h show the relative errors with 6 x 6, 8 x 8, 10 x 10, 12 x 12 and 14 x 14 meshes for (SSSS) and $a/h = 10, 100, 1000$ and 10000. Table 7.1 presents the normalized central deflection values obtained using four elements of this thesis. It can be seen that the result obtained by the SQ4P element is the best, followed by the result of the SQ4H element, and finally by the SQ4C and SQ4T elements. The content of the comment is completely similar to the (CCCC) condition as shown in Table 7.2 and Figures 7.3.a-d. Especially in some cases, the instability of the results obtained by the SQ4T element as shown in Figure 7.2.a and Figure 7.3.a is related to the calculation through the supporting domain of the considered element. A closer assessment of this issue can be done in the future.



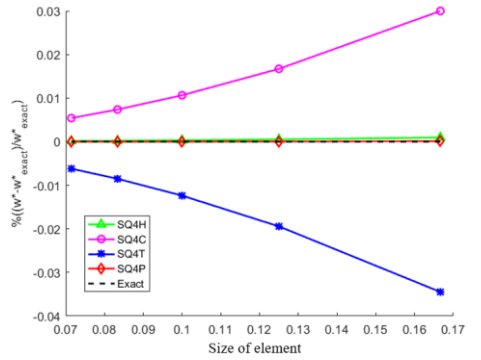
(a) $a/h = 10, \text{SSSS}$



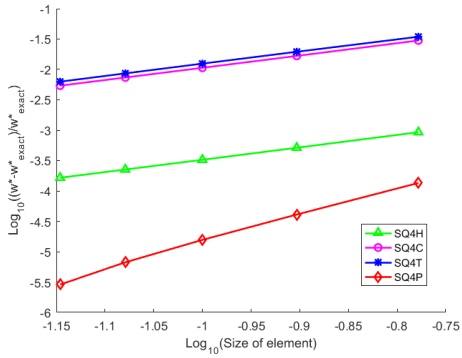
(b) $a/h = 10, \text{SSSS}$



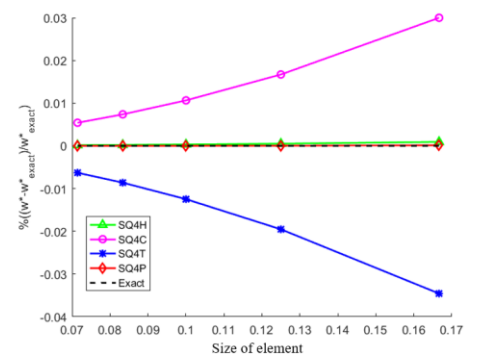
(c) $a/h = 100$, SSSS



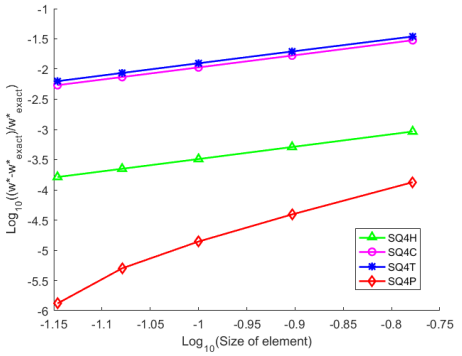
(d) $a/h = 100$, SSSS



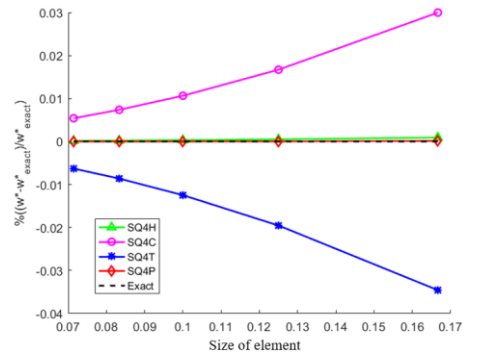
(e) $a/h = 1000$, SSSS



(f) $a/h = 1000$, SSSS

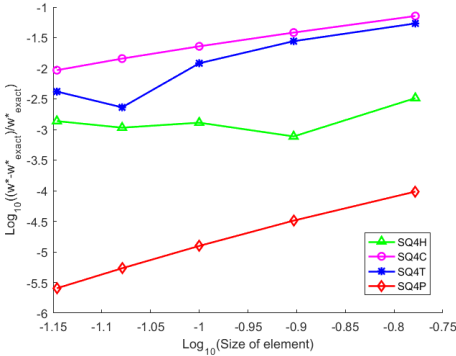


(g) $a/h = 10000$, SSSS

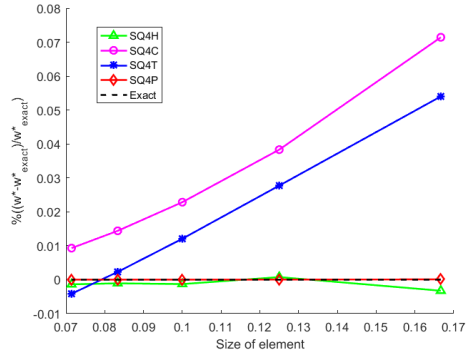


(h) $a/h = 10000$, SSSS

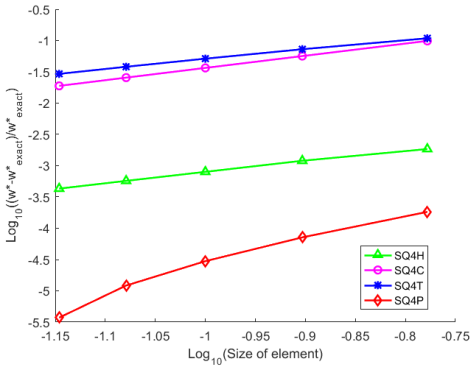
Figure 7.2: The relative error of the normalized deflection of a (SSSS) square plate with $a/h = 10, 100, 1000, 10000$



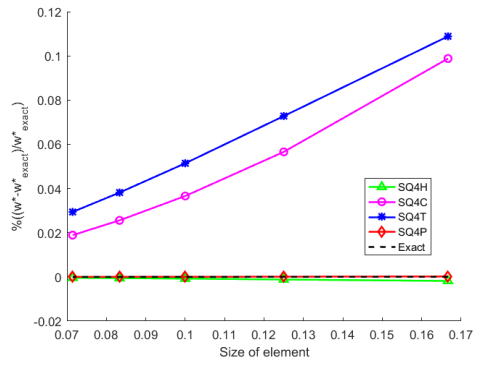
(a) $a/h = 10$, CCCC



(b) $a/h = 10$, CCCC



(c) $a/h = 10000$, CCCC



(d) $a/h = 10000$, CCCC

Figure 7.3: The relative error of the normalized deflection of a (CCCC) square plate with $a/h = 10, 10000$

Table 7.1: Comparison of the normalized central deflection of the (SSSS) square plate

Mesh	w^* (SSSS)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.428705	0.428053	0.427756	0.427607	0.427517
SQ4T	0.416173	0.422814	0.425944	0.427656	0.428687
SQ4C	0.439931	0.434335	0.431777	0.430397	0.429568
SQ4P	0.427287	0.427285	0.427284	0.427284	0.427284
$a/h = 100$					
SQ4H	0.406833	0.406661	0.406582	0.406654	0.406515
SQ4T	0.392431	0.398544	0.401415	0.402984	0.403928
SQ4C	0.418631	0.413238	0.410774	0.409444	0.408646
SQ4P	0.406494	0.406459	0.406451	0.406448	0.406447
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.406614	0.406447	0.40637	0.406329	0.406305
SQ4T	0.392193	0.398301	0.40117	0.402737	0.403680
SQ4C	0.418418	0.413027	0.410564	0.409235	0.408436
SQ4P	0.406293	0.406254	0.406244	0.406241	0.406239
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.406612	0.406445	0.406368	0.406327	0.406303

SQ4T	0.392191	0.398299	0.401167	0.402735	0.403678
SQ4C	0.418416	0.413025	0.410561	0.409233	0.408434
SQ4P	0.406291	0.406253	0.406242	0.406239	0.406237

Table 7.2: Comparison of the normalized central deflection of the (CCCC) square plate

Mesh	w^* (CCCC)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.149973	0.150578	0.150268	0.150302	0.150256
SQ4T	0.158590	0.154636	0.152279	0.150808	0.149836
SQ4C	0.161212	0.156231	0.153900	0.152630	0.151863
SQ4P	0.150448	0.150458	0.150461	0.150462	0.150462
$a/h = 100$					
SQ4H	0.126546	0.126640	0.126684	0.126716	0.126731
SQ4T	0.140491	0.135932	0.133233	0.131559	0.130452
SQ4C	0.139258	0.133919	0.131395	0.130004	0.129159
SQ4P	0.126763	0.126776	0.126781	0.126783	0.126784
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.126300	0.126382	0.126433	0.126461	0.126479
SQ4T	0.140306	0.135739	0.133036	0.131359	0.130251
SQ4C	0.139034	0.133691	0.131163	0.129770	0.128923
SQ4P	0.126510	0.126524	0.126530	0.126532	0.126533
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.126297	0.126379	0.126430	0.126459	0.126477
SQ4T	0.140304	0.135737	0.133034	0.131357	0.130249
SQ4C	0.139032	0.133688	0.131160	0.129768	0.128921
SQ4P	0.126508	0.126522	0.126527	0.126529	0.126531

Table 7.3: Comparison of the computational cost (s)

SSSS, $a/h = 10$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs)	SQ4T (1125 dofs)	SQ4C (1125 dofs)	SQ4P (9245 dofs)	SQ4P (1805 dofs)
0.47674 s	11.2697 s	2.2078 s	81.9208 s	2.8599 s
SSSS, $a/h = 10000$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs)	SQ4T (1125 dofs)	SQ4C (1125 dofs)	SQ4P (9245 dofs)	SQ4P (1805 dofs)
0.47621 s	11.6926 s	2.7641 s	83.1269 s	2.9227 s
CCCC, $a/h = 10$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs)	SQ4T (1125 dofs)	SQ4C (1125 dofs)	SQ4P (9245 dofs)	SQ4P (1805 dofs)
0.7518 s	11.0411 s	2.4872 s	83.3733 s	2.9587 s
CCCC, $a/h = 10000$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs)	SQ4T (1125 dofs)	SQ4C (1125 dofs)	SQ4P (9245 dofs)	SQ4P (1805 dofs)
0.7202 s	11.3438 s	2.9373 s	83.7899 s	2.9251 s

On the basis of a computer with *Intel*® *Core*™ *i7* @ 2.80 GHz, 8.00GB RAM, the comparison of computational costs among these elements is shown in *Table 7.3*. If based on the equivalent number of elements, it can be seen that the

computational time in seconds (s) of the SQ4P element is the largest. However, using $p_1=p_2=3$ for the SQ4P element makes the total number of degrees of freedom (dofs) of this element much larger than the rest. The comparison based on the approximate total number of dofs shows that the computational time of the SQ4T element is the largest. This is also shown in *Table 7.3*.

Free vibration of an isotropic plate

In this section, the thesis deals with the free vibration analysis of thin ($a/h = 200$) and thick ($a/h = 10$) square plates with two boundary conditions: (SSSS) and (CCCC). Material properties: $E = 200$ GPa, $\mu = 0.3$ and $\rho = 8000$ kg/m³. The normalized first four frequencies $\omega^* = [12\omega_{vib}\rho a^4(1-\mu^2)/(Eh^2)]^{1/4}$ based on four elements: SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P with an 8x8 mesh are given in *Table 7.4* and *Figure 7.4*. These results are compared with the exact solutions extracted from the paper of author Abbassian et al. [143]. Besides, the computational time is also recorded among these elements with a total number of degrees of freedom of approximately 1600 over the whole discrete domain. *Table 7.5* shows that the calculational time of the SQ4T element is still the largest.

Table 7.4: Comparison of the normalized first four frequencies of an isotropic square plate

Mode	$a/h = 10, (SSSS)$				Exact
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	
1	4.373	4.368	4.369	4.366	4.37
2	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
3	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
4	8.028	8.391	8.379	8.354	8.35
Mode	$a/h = 10, (CCCC)$				Exact
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	
1	5.726	5.738	5.715	5.703	5.71
2	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
3	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
4	9.414	9.533	9.378	9.325	9.33
Mode	$a/h = 200, (SSSS)$				Exact
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	
1	4.450	4.455	4.445	4.443	4.443
2	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
3	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
4	8.948	8.987	8.909	8.885	8.886
Mode	$a/h = 200, (CCCC)$				Exact
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	
1	6.024	5.986	6.000	5.998	5.999

2	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568
3	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568
4	10.522	10.451	10.419	10.403	10.407

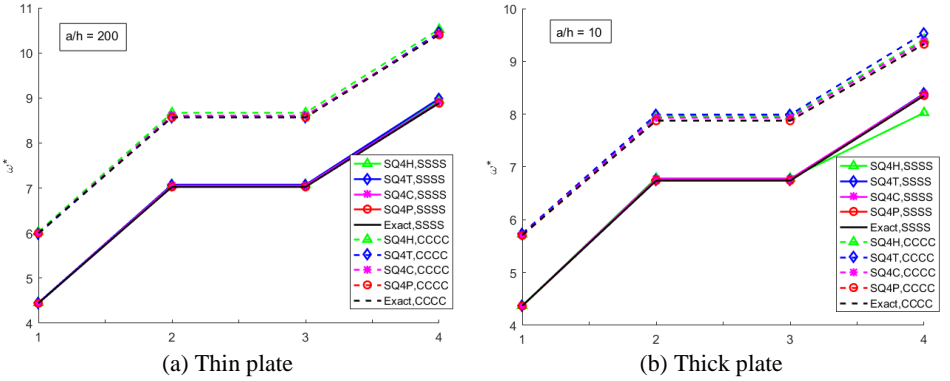


Figure 7.4: Comparison of the normalized first four frequencies

An isotropic spherical shell subjected to uniform load

A simply supported spherical shell under uniformly distributed load q as shown in *Figure 7.5* is analyzed. The central deflection is compared with the other results from literature. Some characteristics: $a = 32$, $R = 96$, $h = 0.32$, $E = 10^7$, $\mu = 0.3$ and $q = 100$. Only one quadrant of the shell is analysed with 8×8 , 12×12 and 16×16 meshes using SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P elements. *Table 7.6* shows the results obtained by applying four elements, SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P and shows the reference results from [6] of the author Darilmaz *et al.*, [144] of author Kumbasar *et al.* and [119] of author Reddy.

Table 7.5: Comparison of the computational cost (s)

SSSS, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
19.4063 s	30.2069 s	17.1924 s	10.6400 s
CCCC, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
13.3436 s	27.0411 s	13.9900 s	10.3403 s
SSSS, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
18.2277 s	30.4165 s	16.7336 s	10.3201 s
CCCC, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
12.3259 s	26.2291 s	13.6833 s	10.1188 s

According to *Table 7.6*, when compared with the analytic solution given by author Reddy, the results obtained by 3 elements, SQ4T, SQ4C and SQ4P,

follow the lower bound trend in which the best result is of the SQ4P element. With the SQ4T element, the error results are much related to the process of determining the supporting domain surrounding the considered element, especially for the double curved shell structure, leading to complexity in the calculation of the stiffness matrix. In addition, the results obtained by the SQ4H element follow the upper bound trend as shown in *Table 7.6*.

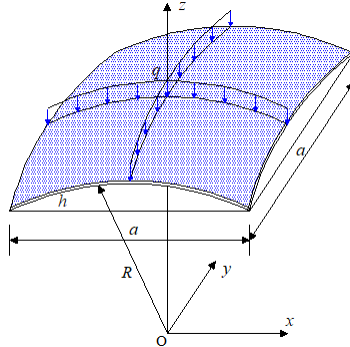


Figure 7.5: An isotropic spherical shell

Table 7.6: Comparison of the central deflection

Comparison	Mesh	w
SQ4H	8 x 8	0.3299
	12 x 12	0.3269
	16 x 16	0.3236
SQ4T	8 x 8	0.2699
	12 x 12	0.2744
	16 x 16	0.2824
SQ4C	8 x 8	0.3108
	12 x 12	0.3124
	16 x 16	0.3129
SQ4P	8 x 8	0.3129
	12 x 12	0.3131
	16 x 16	0.3132
HBQ8 [6]		0.3104
KUMBA [144]		0.3304
Analytic (Reddy) [119]		0.3138

Chapter 8 CONCLUSIONS AND FUTURE WORKS

In this thesis, the group of SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P elements are established to analyze the plate/shell structures. Specifically, the SQ4H element is formed based on cell-based strain smoothing enhancement combined with the type of C0-HSDT, the SQ4T element is related to the twice interpolation

strategy, the SQ4C element is based on the combined strain strategy with respect to overcoming membrane locking as well as shear locking phenomenon and using cell-based strain smoothing enhancement and the SQ4P element is built based on the outstanding properties of Chebyshev polynomials. The results of the current study include:

- SQ4H element for nonlinear analysis of plate and folded plate structures. This element improves model accuracy and reduces numerical instability for geometrically nonlinear analysis.
- SQ4T element for analysis of laminated composite or functionally graded plate and shell structures. By establishing high-order shape functions that take into account the influence of the group of neighboring nodes on the considering element, this element improves the discontinuity of its strain and stress across its boundaries.
- SQ4C element for analysis of plate and shell structures with or without stiffeners. This element improves model accuracy and reduces numerical instability associated with membrane locking when analyzing shell structures.
- SQ4P element for analysis of functionally graded porous plates/shells reinforced by graphene platelets. Improved numerical results based on the mesh and the order of Chebyshev polynomials.
- The elements are established from the equivalent single layer (ESL) theory, so it is easy to adjust the material characteristics from isotropic materials to laminated composite materials, etc.
- The membrane, bending, shear and geometric stiffness matrices are all established from which to determine the global stiffness matrix. Especially with SQ4H and SQ4C elements, the calculation of the bending and geometric stiffness matrices are integrated along the boundary of the smoothing domains instead of over the element surfaces like traditional techniques.

- All elements overcome the phenomenon of *shear locking*, *membrane locking*, especially overcoming the *hourglass* phenomenon (also known as *spurious zero energy modes*) when analyzing free vibration.
- The elements each have their pros and cons in relation to the way they are set up, but subjectively they can be considered as simple quadrilateral elements in application.
- Due to the comparison of the thesis's results based on SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P elements with results extracted from reputable and reliable literature, these elements should be extended in the future.

Based on the established and verified processes, SQ4H, SQ4T, SQ4C and SQ4P elements can be used for further development in the following directions as below:

- Deeper technical improvement, application of more modern calculation tools, more reasonable computational theoretical transformation.
- More closely evaluate the properties of the proposed elements' calculation methods, such as: convergence rate, simplicity in meshing, compatibility and stability of numerical results, as well as computational costs.

In addition, the proposed elements can be continued to expand the scope of numerical analysis for other mechanical problems such as:

- Linear and nonlinear analysis of composite structures with integrated piezoelectric layers.
- Linear and nonlinear analysis of porous plate/shell structures.
- Fluid-structure interaction, ...
- Study of the behaviors of plate/shell structures under hygro-thermo-mechanical loads..
- Analysis of microstructures based on combination with nonlocal elastic theory.
- Elasto-plastic analysis of composite structures.
- Materially nonlinear analysis.

REFERENCES

- [1] S. P. Timoshenko, *Theory Of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1987.
- [2] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2006.
- [3] E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. CRC Press, 2001.
- [4] H. N. Xuan, "A strain smoothing method in finite elements for structural analysis," PhD, University of Liege, Belgium, 2008.
- [5] H. Nguyen-Van, "Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures," PhD PhD thesis, 2009.
- [6] K. Darılmaz and N. Kumbasar, "An 8-node assumed stress hybrid element for analysis of shells," *Computers & Structures*, vol. 84, no. 29, pp. 1990-2000, 2006.
- [7] P.-S. Lee and K.-J. Bathe, "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements," *Computers & Structures*, vol. 82, no. 11, pp. 945-962, 2004.
- [8] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *The Finite Element Method*. McGraw-hill, 1977.
- [9] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques Of Finite Elements*. John Wiley & Sons, 1980.
- [10] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 367-383, 1985.
- [11] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 3, pp. 697-722, 1986.
- [12] K.-J. Bathe, F. Brezzi, and S. W. Cho, "The MITC7 and MITC9 Plate bending elements," *Computers & Structures*, vol. 32, no. 3, pp. 797-814, 1989.

- [13] B. M. Luiz and B. Klaus-Jüen, "Higher-order MITC general shell elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 21, pp. 3729-3754, 1993.
- [14] H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, N. Nguyen-Thanh, T. Nguyen-Thoi, and S. Bordas, "A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 46, no. 5, pp. 679-701, 2010.
- [15] H. Nguyen-Xuan, G. R. Liu, C. Thai-Hoang, and T. Nguyen-Thoi, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9, pp. 471-489, 2010.
- [16] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and C. Thai-Hoang, "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [17] G. Yang, D. Hu, X. Han, and G. Ma, "An extended edge-based smoothed discrete shear gap method for free vibration analysis of cracked Reissner–Mindlin plate," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 51, pp. 477-504, 2017.
- [18] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "A three-node mindlin plate element with improved transverse shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 71-101, 1985.
- [19] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, no. 3, pp. 311-335, 1983.
- [20] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Luong-Van, H. Nguyen-Van, and H. Nguyen-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 51, no. 1, pp. 65-81, 2013.

- [21] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 313, no. 1, pp. 205-223, 2008.
- [22] H. Nguyen-Van, H. L. Ton-That, T. Chau-Dinh, and N. D. Dao, "Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations," Singapore, 2018, pp. 461-475: Springer Singapore.
- [23] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "The MITC4+ shell element and its performance," *Computers & Structures*, vol. 169, pp. 57-68, 2016.
- [24] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new MITC4+ shell element," *Computers & Structures*, vol. 182, pp. 404-418, 2017.
- [25] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element," *Computers & Structures*, vol. 192, pp. 34-49, 2017.
- [26] U. Zrahia and P. Bar-Yoseph, "Plate spectral elements based upon Reissner–Mindlin theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, no. 8, pp. 1341-1360, 1995.
- [27] M. A. Sprague and A. Purkayastha, "Legendre spectral finite elements for Reissner–Mindlin composite plates," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 105, pp. 33-43, 2015.
- [28] K. D. Brito and M. A. Sprague, "Reissner–Mindlin Legendre spectral finite elements with mixed reduced quadrature," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 58, pp. 74-83, 2012.
- [29] T. Liu, Q. Wang, B. Qin, and A. Wang, "Free in-plane vibration of plates with arbitrary curvilinear geometry: Spectral-Chebyshev model and experimental study," *Thin-Walled Structures*, vol. 170, p. 108628, 2022.
- [30] D. He, T. Liu, B. Qin, Q. Wang, Z. Zhai, and D. Shi, "In-plane modal studies of arbitrary laminated triangular plates with elastic boundary constraints by the Chebyshev-Ritz approach," *Composite Structures*, vol. 271, p. 114138, 2021.

- [31] H. Dang-Trung, D.-J. Yang, and Y. C. Liu, "Improvements in Shear Locking and Spurious Zero Energy Modes Using Chebyshev Finite Element Method," *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 19, no. 1, 2018.
- [32] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen, "A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems," *Computational Mechanics*, journal article vol. 39, no. 6, pp. 859-877, 2007.
- [33] L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, no. 10, pp. 1222-1256, 2010.
- [34] T. T. Nguyen, G. R. Liu, K. Y. Dai, and K. Y. Lam, "Selective Smoothed Finite Element Method," *Tsinghua Science & Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 497-508, 2007.
- [35] T. Nguyen-Thoi, "Development Of Smoothed Finite Element Method (SFEM)," PhD, National University of Singapore, 2009.
- [36] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, H. Nguyen-Xuan, and K. Y. Lam, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems," *Computers & Structures*, vol. 87, no. 1, pp. 14-26, 2009.
- [37] T. Nguyen-Thoi, H. C. Vu-Do, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 45, pp. 3005-3027, 2010.
- [38] C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. Nguyen-Xuan, "Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 11, pp. 5657-5677, 2012.
- [39] L. G. R., C. L., N. T. T., Z. K. Y., and Z. G. Y., "A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of

- fracture problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 11, pp. 1466-1497, 2010.
- [40] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, and K. Y. Lam, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, no. 4, pp. 1100-1130, 2009.
- [41] T. T. Ngoc, L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "An edge-based smoothed finite element method for primal–dual shakedown analysis of structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82, no. 7, pp. 917-938, 2010.
- [42] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do, "Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method," *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3019-3039, 2011.
- [43] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, "Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements," *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162-173, 2016.
- [44] T. Chau-Dinh, Q. Nguyen-Duy, and H. Nguyen-Xuan, "Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis," *Acta Mechanica*, journal article vol. 228, no. 6, pp. 2141-2163, 2017.
- [45] N. T. T., P. V. P., N. X. H., and T. H. C., "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [46] L. C. V., N. X. H., A. H., B. S. P. A., R. T., and N. V. H., "A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 12, pp. 1651-1674, 2010.
- [47] C. Thai-Hoang, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, and S. Bordas, "A cell — based smoothed finite element method for free vibration

- and buckling analysis of shells," *KSCE Journal of Civil Engineering*, journal article vol. 15, no. 2, pp. 347-361, 2011.
- [48] T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and P. Ngo-Thanh, "Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements," *Computers & Structures*, vol. 125, pp. 100-113, 2013.
- [49] J. h. Lim, D. Sohn, and S. Im, *Variable-node element families for mesh connection and adaptive mesh computation*. 2012, pp. 349-370.
- [50] Y. S. Cho, S. Jun, S. Im, and H.-G. Kim, *An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes*. 2005, pp. 3022-3046.
- [51] T. Q. Bui, D. Q. Vo, C. Zhang, and D. D. Nguyen, "A consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4): Formulation and applications," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 84, pp. 14-31, 2014.
- [52] S. C. Wu, W. H. Zhang, X. Peng, and B. R. Miao, "A Twice-Interpolation finite element method (TFEM) for crack propagation problems," *International Journal of Computational Methods*, vol. 09, no. 04, p. 1250055, 2012.
- [53] C. Zheng, S. C. Wu, X. H. Tang, and J. H. Zhang, "A novel twice-interpolation finite element method for solid mechanics problems," *Acta Mechanica Sinica*, journal article vol. 26, no. 2, pp. 265-278, 2010.
- [54] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4135-4195, 2005.
- [55] N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 21, pp. 1892-1908, 2011.
- [56] N. Nguyen-Thanh *et al.*, "An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 265-291, 2015.

- [57] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 43, pp. 89-108, 2014.
- [58] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory," *Composite Structures*, vol. 104, pp. 196-214, 2013.
- [59] L. V. Tran, A. J. M. Ferreira, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 368-383, 2013.
- [60] P. Phung-Van, M. Abdel-Wahab, K. M. Liew, S. P. A. Bordas, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 123, pp. 137-149, 2015.
- [61] Y. Bazilevs *et al.*, "Isogeometric analysis using T-splines," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 5, pp. 229-263, 2010.
- [62] H. Gómez, V. M. Calo, Y. Bazilevs, and T. J. R. Hughes, "Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase-field model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 49, pp. 4333-4352, 2008.
- [63] Teodor M. Atanackovic and A. Guran, *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*. Springer Science+Business Media, 2000.
- [64] Timoshenko. SP and G. JM, *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [65] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells-Theory and analysis*. CRC Press, 2004.
- [66] N. V. Hau, "Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) dưới tác dụng tải trọng cơ nhiệt," PhD, HCMUTE, 2018.
- [67] Tran Ich Thinh and N. N. Khoa, *Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn*. Hà Nội, 2007.
- [68] H.-S. Shen, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, 2019.

- [69] T. Q. Bui *et al.*, "On the high temperature mechanical behaviors analysis of heated functionally graded plates using FEM and a new third-order shear deformation plate theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 92, pp. 218-241, 2016.
- [70] N. D. Duc, *Nonlinear static and dynamic stability of functionally graded plates and shells*. Vietnam National University, 2014.
- [71] K. A. Khor, Z. L. Dong, and Y. W. Gu, "Plasma sprayed functionally graded thermal barrier coatings," *Materials Letters*, vol. 38, no. 6, pp. 437-444, 1999.
- [72] W.-H. Lee, S.-C. Han, and W.-T. Park, "A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 122, pp. 330-342, 2015.
- [73] W.-Y. Jung and S.-C. Han, "Static and eigenvalue problems of Sigmoid Functionally Graded Materials (S-FGM) micro-scale plates using the modified couple stress theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 12, pp. 3506-3524, 2015.
- [74] K. Gao, W. Gao, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear dynamic buckling of the imperfect orthotropic E-FGM circular cylindrical shells subjected to the longitudinal constant velocity," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 138-139, pp. 199-209, 2018.
- [75] C. Betts, "Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review," *Materials Science and Technology*, vol. 28, no. 2, pp. 129-143, 2012.
- [76] L.-P. Lefebvre, J. Banhart, and D. C. Dunand, "Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments," *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, no. 9, pp. 775-787, 2008.
- [77] K. Li *et al.*, "Isogeometric Analysis of functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 114-130, 2018.
- [78] S. Sahmani, A. M. Fattahi, and N. A. Ahmed, "Analytical treatment on the nonlocal strain gradient vibrational response of postbuckled functionally

- graded porous micro-/nanoplates reinforced with GPL," *Engineering with Computers*, vol. 36, no. 4, pp. 1559-1578, 2020.
- [79] N. V. Nguyen, H. Nguyen-Xuan, D. Lee, and J. Lee, "A novel computational approach to functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement," *Thin-Walled Structures*, vol. 150, p. 106684, 2020.
- [80] K. Gao, W. Gao, D. Chen, and J. Yang, "Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 831-846, 2018.
- [81] M. A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, and N. Koratkar, "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content," *ACS Nano*, vol. 3, no. 12, pp. 3884-3890, 2009.
- [82] F. Ebrahimi and A. Dabbagh, "Vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates based on a Halpin-Tsai homogenization model," *Composites Part B: Engineering*, vol. 173, p. 106955, 2019.
- [83] Hieu Nguyen-Van, Nam Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "A simple and accurate four-node quadrilateral element using stabilized nodal integration for laminated plates," *CMC: Computers, Materials and Continua*, vol. 6, no. 3, pp. 159-176, 2007.
- [84] R. L. Taylor, "Finite element analysis of linear shell problems, in J. Whiteman (ed.)," in *Proceeding of the Mathematics in Finite Element and Applications*, 1987: Academic Press, New York.
- [85] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method, Vol. 2: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann-Oxford, 2000.
- [86] S. Mukherjee, Z. Bao, M. Roman, and N. Aubry, "Nonlinear mechanics of MEMS plates with a total Lagrangian approach," *Computers & Structures*, vol. 83, no. 10, pp. 758-768, 2005.
- [87] R. Zinno and E. J. Barbero, "Total Lagrangian formulation for laminated composite plates analysed by three-dimensional finite elements with two-dimensional kinematic constraints," *Computers & Structures*, vol. 57, no. 3, pp. 455-466, 1995.

- [88] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements," *Composite Structures*, vol. 72, no. 3, pp. 301-310, 2006.
- [89] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and Q. Lieu-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C0-type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates," *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 549-558, 2015.
- [90] N. S. Putcha and J. N. Reddy, "A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates," *Computers & Structures*, vol. 22, no. 4, pp. 529-538, 1986.
- [91] A. K. Upadhyay and K. K. Shukla, "Large deformation flexural behavior of laminated composite skew plates: An analytical approach," *Composite Structures*, vol. 94, no. 12, pp. 3722-3735, 2012.
- [92] G. Watts, S. Pradyumna, and M. K. Singha, *Nonlinear analysis of quadrilateral composite plates using moving kriging based element free Galerkin method*. 2016.
- [93] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Geometric non-linear analysis of folded plate structures by the spline strip kernel particle method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, no. 9, pp. 1102-1133, 2007.
- [94] "Element Reference. Ansys 6.1 Documentation."
- [95] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Analysis of Symmetrically Laminated Folded Plate Structures Using the Meshfree Galerkin Method," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 16, no. 1, pp. 69-81, 2009.
- [96] R. L. Spilker, D. M. Jakobs, and B. E. Engelmann, "Efficient hybrid stress isoparametric elements for moderately thick and thin multiplayer plates," *Hybrid and Mixed Finite Element Method*, vol. 73, pp. 113-122, 1985.
- [97] T. E. Wilt, A. F. Saleeb, and T. Y. Chang, "A mixed element for laminated plates and shells," *Computers & Structures*, vol. 37, no. 4, pp. 597-611, 1990.

- [98] G. Z. J. and C. W. J., "A refined discrete triangular Mindlin element for laminated composite plates," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 14, pp. 575-593, 2002.
- [99] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Two simple and efficient displacement-based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 11, pp. 1771-1796, 2004.
- [100] J. M. Whitney, "Bending-extensional coupling in laminated plates under transverse load," *Journal of Composite Materials*, vol. 3, pp. 398-411, 1969.
- [101] J. M. Whitney, "The effect of boundary conditions on the response of laminated composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pp. 192-203, 1970.
- [102] G. Singh, P. Raveendranath, and G. Vekateswara Rao, "An accurate four-node shear flexible composite plate element," vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [103] S. Gajbir, R. P., and V. R. G., "An accurate four-node shear flexible composite plate element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [104] W. Lanhe, L. Hua, and W. Daobin, "Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 68, no. 3, pp. 319-330, 2005.
- [105] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, and R. M. N. Jorge, "Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4265-4278, 2005.
- [106] K. M. Liew, Y. Q. Huang, and J. N. Reddy, "Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 19, pp. 2203-2222, 2003.
- [107] A. A. Khdeir and L. Librescu, "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration," *Composite Structures*, vol. 9, no. 4, pp. 259-277, 1988.

- [108] J. N. Reddy and N. D. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 98, no. 2, pp. 157-170, 1985.
- [109] K. M. Liew, "Solving The Vibration Of Thick Symmetric Laminates By Reissner/Mindlin Plate Theory And The p-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, no. 3, pp. 343-360, 1996.
- [110] A. J. M. Ferreira and G. E. Fasshauer, "Analysis of natural frequencies of composite plates by an RBF-pseudospectral method," *Composite Structures*, vol. 79, no. 2, pp. 202-210, 2007.
- [111] C. P. Wu and W. Y. Chen, "Vibration And Stability Of Laminated Plates Based On A Local High Order Plate Theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177, no. 4, pp. 503-520, 1994.
- [112] H. Matsunaga, "Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory," *Composite Structures*, vol. 48, no. 4, pp. 231-244, 2000.
- [113] K. N. Cho, C. W. Bert, and A. G. Striz, "Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 145, no. 3, pp. 429-442, 1991.
- [114] W. Zhen and C. Wanji, "Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global-local higher-order theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, no. 1, pp. 333-349, 2006.
- [115] K. M. J. J. o. S. Liew and Vibration, "Solving the vibration of thick symmetric laminates by REISSNER/MINDLIN plate theory and the p-RITZ method," vol. 198, pp. 343-360, 1996.
- [116] N. D. Phan and J. N. Reddy, "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 12, pp. 2201-2219, 1985.
- [117] M. L. Liu and C. W. S. To, "Free vibration analysis of laminated composite shell structures using hybrid strain based layerwise finite elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, no. 1, pp. 83-120, 2003.

- [118] S. Jayasankar, S. Mahesh, S. Narayanan, and C. Padmanabhan, "Dynamic analysis of layered composite shells using nine node degenerate shell elements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 1, pp. 1-11, 2007.
- [119] J. N. Reddy, "Exact solutions of moderately thick laminated shells," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 794-809, 1984.
- [120] L. Liu, L. P. Chua, and D. N. Ghista, "Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates," *Composite Structures*, vol. 78, no. 1, pp. 58-69, 2007.
- [121] A. K. Noor, "Stability of multilayered composite plates," *Fibre Science and Technology*, vol. 8, no. 2, pp. 81-89, 1975.
- [122] A. Chakrabarti and A. H. Sheikh, "Buckling of Laminated Composite Plates by a New Element Based on Higher Order Shear Deformation Theory," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 10, no. 4, pp. 303-317, 2003.
- [123] J. N. Reddy and A. A. Khdeir, "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories," *AIAA Journal*, vol. 27, no. 12, pp. 1808-1817, 1989.
- [124] L. R. Kumar, P. K. Datta, and D. L. Prabhakara, "Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading," *Composite Structures*, vol. 60, no. 2, pp. 171-181, 2003.
- [125] B. G. Prusty and S. K. Satsangi, "Finite element buckling analysis of laminated composite stiffened shells," *International Journal of Crashworthiness*, vol. 6, no. 4, pp. 471-484, 2001.
- [126] M. Di Sciuva and E. Carrera, "Static buckling of moderately thick, anisotropic, laminated and sandwich cylindrical shell panels," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 10, pp. 1782-1793, 1990.
- [127] V. N. Van Do and C.-H. Lee, "Nonlinear analyses of FGM plates in bending by using a modified radial point interpolation mesh-free method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 57, pp. 1-20, 2018.

- [128] H. Luong-Van, T. Nguyen-Thoi, G. R. Liu, and P. Phung-Van, "A cell-based smoothed finite element method using three-node shear-locking free Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) for dynamic response of laminated composite plates on viscoelastic foundation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 42, pp. 8-19, 2014.
- [129] X. Cui, G.-R. Liu, G.-y. Li, G. Zhang, and G. Zheng, "Analysis of plates and shells using an edge-based smoothed finite element method," *Computational Mechanics*, vol. 45, no. 2, p. 141, 2009.
- [130] D. J. Allman, "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Computers & Structures*, vol. 19, no. 1, pp. 1-8, 1984.
- [131] N. Nguyen-Minh, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and T. Vo-Duy, "Static and free vibration analyses of stiffened folded plates using a cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3)," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 266, pp. 212-234, 2015.
- [132] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor, and E. L. Wilson, "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 445-457, 1990.
- [133] C. W. S. To and B. Wang, "Hybrid strain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, no. 3, pp. 177-207, 1998.
- [134] T. Park, K. Kim, and S. Han, "Linear static and dynamic analysis of laminated composite plates and shells using a 4-node quasi-conforming shell element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 237-248, 2005.
- [135] B. R. Somashekar, G. Prathap, and C. R. Babu, "A field-consistent, four-noded, laminated, anisotropic plate/shell element," *Computers & Structures*, vol. 25, no. 3, pp. 345-353, 1987.
- [136] M. P. Rossow and A. K. Ibrahimkhail, "Constraint method analysis of stiffened plates," *Computers & Structures*, vol. 8, no. 1, pp. 51-60, 1978.

- [137] W. Zhao, "Buckling analysis of stiffened plates with straight and curvilinear stiffener(s).", Virginia Tech2013.
- [138] M. Feiz and A. F. Rohach, "Development of a type I Chebyshev polynomial nodal model for the multigroup diffusion equation in 1-D," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 16, no. 2, pp. 63-72, 1989.
- [139] X. Xu and C.-S. Zhang, "A new estimate for a quantity involving the Chebyshev polynomials of the first kind," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 476, no. 2, pp. 302-308, 2019.
- [140] R. L. Taylor and F. Auricchio, "Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II—A simple triangle," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 18, pp. 3057-3066, 1993.
- [141] Q. H. Nguyen, L. B. Nguyen, H. B. Nguyen, and H. Nguyen-Xuan, "A three-variable high order shear deformation theory for isogeometric free vibration, buckling and instability analysis of FG porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 245, p. 112321, 2020.
- [142] J. Yang, D. Chen, and S. Kitipornchai, "Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method," *Composite Structures*, vol. 193, pp. 281-294, 2018.
- [143] F. Abbassian, D. J. Dawswell, and N. C. Knowles, "Free vibration benchmarks Softback," Atkins Engineering Sciences, Glasgow1987.
- [144] N. Kumbasar and T. Aksu, "A finite element formulation for moderately thick shells of general shape," *Computers & Structures*, vol. 54, no. 1, pp. 49-57, 1995.

LIST OF PUBLICATIONS

1. H Nguyen-Van, HL Ton-That, T Chau-Dinh, ND Dao. Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations. *Proceedings of the International Conference on Advances in Computational Mechanics*, Springer, Singapore, **Scopus**, pp. 461-475, 2017.
2. HL Ton-That, TK Nguyen, H Nguyen-Van. Phân tích ứng xử tĩnh tấm composite đa lớp dựa trên một lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.
3. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Phân tích dao động tự do của vỏ có sườn gia cường bằng phần tử tứ giác MISQ24. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.
4. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using SQ4T Elements based on Twice Interpolation Strategy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **ESCI, Q1**, Vol. 6(1), pp. 125-136, 2020.
5. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh, C Huynh-Van. Enhancement to four-node quadrilateral plate elements by using cell-based smoothed strains and higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of composite structures. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **SCIE, Q1**, Vol. 22(7), pp. 2302-2329, 2020.
6. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. An Improved Four-Node Element for Analysis of Composite Plate/Shell Structures Based on Twice Interpolation Strategy. *International Journal of Computational Methods*, **SCIE, Q2**, Vol. 17(6), p. 1950020, 2020.
7. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. Static and buckling analyses of stiffened plate/shell structures using the quadrilateral element SQ4C. *Comptes Rendus. Mécanique*, **SCIE, Q3**, Vol. 348(4), pp. 285-305, 2020.
8. HL Ton-That, H Nguyen-Van. A Combined Strain Element in Static, Frequency and Buckling Analyses of Laminated Composite Plates and Shells.

Periodica Polytechnica Civil Engineering, **SCIE**, **Q4**, Vol. 65(1), pp. 56-71, 2021.

9. HL Ton-That, H Nguyen-Van, T Chau-Dinh. A novel quadrilateral element for analysis of functionally graded porous plates/shells reinforced by graphene platelets. *Archive of Applied Mechanics*, **SCIE**, **Q3**, Vol. 91(6), pp. 2435-2466, 2021.